Jednostajna ciągłość i lipschitzowskość

Zadanie 1. Niech $f : (a,b) \mapsto \mathbb{R}$ będzie funkcją jednostajnie ciagłą. Pokaż, że tę funkcję da się rozszerzyć do funkcji ciągłej $\widetilde{f} : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$, tzn. istnieją odpowiednie jednostronne granice na krańcach przedziału.
WSKAZÓWKA: Ciągi Cauchy'ego.

Zadanie 2. Pokaż, że złożenie funkcji jednostajnie ciągłych jest funkcją jednostajnie ciągłą, oraz że złożenie funkcji lipschitzowskich jest funkcją lipschitzowską.

Zadanie 3. Pokaż, że suma funkcji jednostajnie ciągłych o tej samej dziedzinie jest funkcją jednostajnie ciągłą.
Czy podobne twierdzenie zachodzi dla iloczynu? Rozpatrz przypadki odcinków ograniczonych i nieograniczonych.

Zadanie 4. Uzasadnij, że funkcja jednostajnie ciągła na ograniczonym przedziale (a,b) jest ograniczona.

Zadanie 5. Niech $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, dla której istnieją skończone granice w $\pm\infty$. Pokaż, że f jest jednostajnie ciągła oraz ograniczona.

Zadanie 6. Zbadaj jednostajną ciągłość oraz lipschitzowskość funkcji na podanych zbiorach:

- $f(x) = \sin x$ na $(0,\pi)$, oraz na $\mathbb{R}$,
- $f(x) = \sqrt{x}$ na $[0,1]$, oraz na $[1,\infty)$,
- $f(x) = \sin x^2$ na $(0, 2\pi)$, oraz na $\mathbb{R}$,
- $f(x) = \frac{x}{|x|+1}$ na $\mathbb{R}$.

Zadanie 7. W zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$ zbadaj ciągłość oraz jednostajną ciągłość funkcji

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos(x-2)}{x^2-4x+4} & x \in (2,\infty) \\ a & x = 2 \end{cases}$$

na zbiorze $[2,+\infty)$.

Wypukłość funkcji

Zadanie 8. Niech f będzie funkcją wypukłą, a g funkcją wypukłą i rosnącą. Pokaż, że $g \circ f$ jest wypukła.
Uzasadnij, że założenie monotoniczności jest konieczne.

Zadanie 9. Załóżmy, że f jest funkcją wypukłą na odcinku $[0, a]$ oraz $f(0) = 0$. Pokaż, że dla dowolnych $x, y : x + y \in (0, a)$ zachodzi $f(x) + f(y) \leq f(x + y)$.
Korzystając z tego faktu uzasadnij, że dla $x, y, z : x + y + z \in (0, \pi)$ zachodzi

$$\sin x + \sin y + \sin z \geq \sin(x + y + z)$$

Badanie przebiegu funkcji

Zadanie 10. Wyznacz $p \in R$ tak, aby funkcja $f(x) = x^3 - px + 5x - 2$ osiągała minimum w punkcie $x = 5$.

Zadanie 11. Zbadaj wypukłość i punkty przegięcia funkcji $f(x) = x^2 \ln x$.

Zadanie 12. Pokaż, że dla każdego $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ zachodzi nierówność $sin(\operatorname{tg} x) \geq x$.

Zadanie 13. Pokaż, że dla każdego $x \in (-1, +\infty)$ zachodzi tożsamość $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} \frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4}$.

Zadanie 14. Przeprowadź analizę przebiegu funkcji (granice na krańcach przedziałów, ekstrema, punkty przegięcia, przedziały monotoniczności, wypukłość):

- $f(x) = 2x + 2e^{-x}$ na $\mathbb{R}$,
- $g(x) = x + \frac{1}{2}e^{-2x}$ na $\mathbb{R}$,
- $h(x) = x^{-x}$ na $(0, \infty)$.