Zadanie 1. Sprawdzić, czy podana funkcja jest rozwiązaniem podanego równania różniczkowego: a) $y(t) = \text{tg } t, y'(t) = 1{+}y(t)^2$, b) $y(t) = \frac{\sin t}{t}, ty'(t){+}y(t) = \cos t$, c) $y(t) = \cos t, y'(t)^2 = 1{-}y(t)^2$. Rozwiązać równania (rozdzielając zmienne y oraz t w a) i c) oraz całkując obie strony równania b)).

Zadanie 2. Znaleźć wszystkie *rozwiązania ogólne* (tzn. rozwiązania zależne od pewnej stałej C) następujących równań różniczkowych o rozdzielonych zmiennych i naszkicować ich wykresy dla różnych stałych C: a) $y'(t) = e^{t+y(t)}$, b) $y'(t) = \cos^2 y(t)$, c) $y'(t) = \sqrt{t}/y(t)$, d) $y'(t) = \sqrt{y(t)/t}$, e) $y'(t) = \sqrt{y-2}$, f) $y'(t) = 2\sqrt{y(t)}\sin^2\sqrt{y(t)}$.

Zadanie 3. Znaleźć rozwiązania następujących równań spełniających podany dodatkowy *warunek początkowy*: a) $y'(t) = 2,\ y(0) = 2$, b) $y'(t) = y(t)/t,\ y(1) = 5$, c) $y'(t) = -y(t)^2e^t,\ y(0) = 1/2$.

Zadanie 4. Pewna osoba uczy się pisać na maszynie. Niech $y(t)$ oznacza maksymalną liczbę słów jakie potrafi ona napisać w ciągu minuty po t godzinach uczenia się. Załóżmy, że prędkość zmian $y(t)$ (tzn. $y'(t)$) jest proporcjonalna do różnicy pomiędzy $y(t)$ oraz górną granicą 140. Rozsądnym jest założyć, że na początku osoba ta nie potrafiła napisać żadnego słowa (tzn. $y(0) = 0$). Okazało się, że osoba ta potafi napisać 35 słów na minutę po 10 godzinach uczenia się.
a) Ile słów na minutę będzie pisać ta osoba po 20 godzinach uczenia się?
b) Jak długo musi ona ćwiczyć, aby napisać 105 słów na minutę?
c) Jak długo musi ona ćwiczyć, aby napisać 80 słów na minutę?

Zadanie 5. Plotka rozprzestrzenia się w populacji liczącej 1000 osób z prędkością proporcjonalną do iloczynu liczby osób, które już słyszały tę plotkę oraz liczby osób, ktore jeszcze nie słyszały tej plotki. Załóżmy, że 200 osób rozprzestrzenia plotkę i po jednym dniu wie o niej 500 osób. Ile czasu potrzeba, aby o plotce dowiedziało się 800 osób?

Zadanie 6. Wiadomo, że szybkość zmian temperatury danego ciała jest proporcjonalna do różnicy między temperaturą tego ciała $y(t)$ a temperaturą otoczenia. Zakładamy, że początkowo $y(0) = 100^oC$ w temperaturze otoczenia 20^oC. Po dziesięciu minutach temperatura ciała wynosiła 60^oC. Po ilu minutach ciało będzie miało temperaturę 25^oC?

Zadanie 7. Ciało zamordowanego znaleziono o 19:30. Lekarz sądowy przybył o 20:20 i natychmiast zmierzył temperaturę ciała denata – wynosiła ona $32,6^o$ C, a temperatura w pomieszczeniu: 21^oC. Godzinę później, gdy usuwano ciało, temperatura wynosiła $31,4^o$C. Najbardziej podejrzana osoba, która mogła popełnić to morderstwo – Jan G., twierdzi jednak, że jest nie winny. Ma alibi. Po połuniu był on w restauracji. O 17:00 miał rozmowę zamiejscową, po której natychmiast opuścił restaurację. Restauracja znajduje się 5 minut na piechotę od miejsca morderstwa. Czy alibi to jest niepodważalne? Obrońca Jana G. zauważył, że zamordowany był u lekarza o 16:00 w dniu śmierci i wtedy jego temperatura wynosiła $38,3^o$C. Jeśli założylibyśmy, że taką temperaturę miał on w chwili śmierci czy można dalej podejrzewać, że Jan G. popełnił to morderstwo?

Zadanie 8. Wykazać, że dowolne rozwiązanie równania

$$y'(t) = f(y(t))g(t),$$

dla pewnych funkcji ciągłych $f : (a, b) \to (0, \infty)$ oraz $g : (c, d) \to \mathbb{R}$, jest postaci

$$y(t) = F^{-1}(G(t) + C),$$

gdzie $F' = 1/f$, $G'(t) = g(t)$, $C \in \mathbb{R}$. Podać postać rozwiązania tego równania spełniające dodatkowo *warunek początkowy*

$$y(t_0) = y_0$$

dla pewnych $t_0 \in (c, d)$, $y_0 \in (a, b)$.

Zadanie 9. Punkt materialny o masie m spada swobodnie pod wpływem siły ciężkości. Pomijając opór powietrza i korzystając z drugiej zasady dynamiki Newtona $F = mg$, gdzie g to przyspieszenie ziemskie, a F to siła wyznaczona wzorem $ms''(t)$, wyznaczyć położenie $s(t)$ w zależności od czasu t. Wsk. Scałkować dwukrotnie wzór Newtona.