Zadanie 23. Rozwiązać równania zupełne:
a) $2xy\,dx+(x^2-y^2)\,dy=0$, b) $e^{-y}\,dx-(2y+xe^{-y})\,dy=0$, c) $ye^{xy}\,dx+(\cos(y)+xe^{xy})\,dy=0$.

Zadanie 24. W podanych równaniach dobrać stałą a tak, aby były one zupełne, a następnie rozwiązać je: a) $x+ye^{2xy}+axe^{2xy}y'=0$, b) $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{(ax+1)}{y^3}y'=0$, c) $((2+a)y+2xy'(x)=0$.

Zadanie 25. Znaleźć wszystkie funkcje $f(x)$, dla których równanie $y^2\sin x+yf(x)y'=0$ jest zupełne. Rozwiązać równanie dla tych f.

Zadanie 26. Znaleźć współczynnik $f=f(x)$ w równaniu $f(x)y'+x^2+y=0$, jeżeli wiadomo, że ma ono czynnik całkujący postaci $L(x)=x$.

Zadanie 27. Sprawdzić, że podana funkcja $L(x,y)$ jest czynnikiem całkującym danego równania, a następnie je rozwiązać.
a) $6xy\,dx+(4y+9x^2)\,dy=0,\quad L(x,y)=y^2$,
b) $-y^2\,dx+(x^2+xy)\,dy=0,\quad L(x,y)=1/(x^2y)$,
c) $y(x+y+1)\,dx+(x+2y)\,dy=0,\quad L(x,y)=e^x$.

Zadanie 28. Równanie różniczkowe może mieć więcej niż jeden czynnik całkujący. Udowodnić, że $L_1(x,y)=1/(xy)$, $L_2(x,y)=1/y^2$, $L_3(x,y)=1/(x^2+y^2)$ są czynnikami całkującymi równania $y\,dx-x\,dy=0$. Uzasadnić, że tak otrzymane rozwiązania są równoważne.

Zadanie 29. Scałkować równania metodą czynnika całkującego:
a) $\left(\frac{x}{y}+1\right)dx+\left(\frac{x}{y}-1\right)dy=0$, b) $(x^2+y)dx-xdy=0$, c) $(y+x^2)dy+(x-xy)dx=0$.

Zadanie 30. Scałkować nasępujące równania: a) $xdx+ydy=0$, b) $\frac{1}{x}dx-\frac{y}{x^2}dy=0$,
c) $\frac{1}{y}dx-\frac{x}{y^2}dy=0$, d) $\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0$, e) $(2x-y+1)dx+(2y-x-1)dy=0$, f) $xdx+ydy+\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=0$.

Zadanie 31. Scałkować: a) $\frac{xdx+ydy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}+\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0$, b) $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}-1\right)dx-\frac{ydy}{\sqrt{x^2-y^2}}=0$,
c) $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2+2}}\right)dx-\left(\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}-2\right)dy=0$.

Zadanie 32. Znaleźć rozwiązania z danymi początkowymi x_0, y_0 (tzn. $y(x_0)=y_0$):
a) $\frac{(x+2y)dx+ydy}{(x+y)^2}=0$ oraz $x_0=1$, $y_0=0$,
b) $(x+y)dx+(x-y)dy=0$ oraz $x_0=0$, $y_0=0$, lub $(x_0,y_0)=(1,1)$ np. scalkować od $(1,1)$ do (x,y) krzywoliniowo)
c) $(x-y)dx+(2y-x)dy=0$ oraz $x_0=0$, $y_0=0$.

Zadanie 33. Scałkować równanie $ydx+xdy=0$ jak równanie różniczkowe zupełne i jak równanie o rozdzielonych zmiennych. Określić zależność między otrzymanymi całkami.

Zadanie 34. Scałkować używając czynnika całkującego postaci $L=L(x)$ lub $L=L(y)$:
a) $\left(\frac{x}{y}+1\right)dx+\left(\frac{x}{y}-1\right)dy=0$, b) $(x^2+y)dx-xdy=0$, c) $(2xy^2-y)dx+(y^2+x+y)dy=0$,
d) $(xy^2+y)dx-xdy=0$.

Zadanie 35. Scałkować metodą czynnika całkującego: a) $(1-x^2y)dx+x^2(y-x)dy=0$,
b) $(\sqrt{x^2-y}+2x)dx-dy=0$, c) $y(1+xy)dx+(\frac{1}{2}x^2y+y+1)dy=0$.

Zadanie 36. Rozwiązać następujące równania za pomocą jednego z czynników całkujących postaci: $L=L(x+y), L=L(xy), L=L(x^2-y^2), L=L(x^2+y^2)$: a) $\left(2y+\frac{1}{(x+y)^2}\right)dx+\left(3y+x+\frac{1}{(x+y)^2}\right)dy=0$
b) $x^2y^3+y+(x^3y^2-x)y'=0$, c) $x\left(4+\frac{1}{x^2-y^2}\right)dx-y\left(4-\frac{1}{x^2-y^2}\right)dy=0$, d) $(y+x^2)dy+(x-xy)dx=0$.

Zadanie 37. Co trzeba założyć o funkcji g aby funkcja $f(x)=\int_a^b g(x,y)dy$ była: a) ciągła i różniczkowalna jeśli $[a,b]\subset(-\infty,\infty)$, b) ciągła i różniczkowalna jesli $a=0$ a $b=\infty$, c) całkowalna na przedziale ograniczonym $[c,d]\subset(-\infty,\infty)$ bądź nieograniczonym.

Zadanie 38. Czy z warunku $\frac{\partial M}{\partial x}(x,y)=0$ dla $(x,y)\in U$ wynika, że M nie zależy od x dla U: a) pierścienia o promieniach 1 i 2, b) koła o promieniu 1, c) $(a,b)\times(c,d)$, d) pierścienia z punktu a) przeciętego z $x>0$, e) pierścienia z punktu a) przeciętego z $y>0$, f) sumy dwóch rozłącznych kół?