Zadanie 39. Oblicz pierwsze dwie iteracje Picarda dla zagadnień: a) $y' = t^2 + y^2$, $y(0) = 1$, b) $y' = e^t + y^2$, $y(0) = 0$.

Zadanie 40. Wyprowadź wzór na n-tą iterację Picarda $y_n(x)$ i oblicz jej granicę gdy $n \to \infty$ dla podanych zagadnień Cauchy'ego: a) $y' = -y, \quad y(0) = 1$, b) $y' = x + y, \quad y(0) = 1$, c) $y' = 2xy, \quad y(0) = 1$, d) $y' + y^2 = 0, \quad y(0) = 0$.

Zadanie 41. Oblicz kolejne iteracje Picarda dla zagadnienia Cauchy'ego $y' = 2t(y+1)$, $y(0) = 0$ i udowodnij, że zbiegają one do rozwiązania $y(t) = e^{t^2} - 1$.

Zadanie 42. Udowodnij, że $y(t) = -1$ jest jedynym rozwiązaniem zagadnienia $y' = t(1+y)$, $y(0) = -1$. (Wsk. zastosuj Lemat Gronwalla.)

Zadanie 43. Dla podanich niżej zagadnień Cauchy'ego udowodnij, że rozwiązanie $y = y(t)$ istnieje na zadanym przedziale. Powtarzając rozumowanie podane na wykladzie udowodnij, że jest to jedyne rozwiązanie. a) $y' = y^2 + \cos t^2, \quad y(0) = 0, \quad 0 \le t \le 1/2$,
b) $y' = 1 + y + y^2 \cos t, \quad y(0) = 0, \quad 0 \le t \le 1/3$,
c) $y' = t + y^2, \quad y(0) = 0, \quad 0 \le t \le (1/2)^{2/3}$,
d) $y' = e^{-t^2} + y^2, \quad y(0) = 0, \quad 0 \le t \le 1/2$,
e) $y' = e^{-t^2} + y^2, \quad y(1) = 0, \quad 1 \le t \le 1 + \sqrt{e}/2$,
f) $y' = y + e^{-y} + e^{-t}, \quad y(0) = 0; \quad 0 \le t \le 1$.

Zadanie 44. Wskaż przedział (możliwie największy), na którym istnieje rozwiązanie zagadnienia: a) $y' = 2y^2 - t$, $y(1) = 1$, b) $y' = t + e^y$, $y(1) = 0$.

Zadanie 45. Uzasadnij, że zagadnienie $y' = 1 + y^2, \ y(0) = 0$ nie ma rozwiązania określonego na całej prostej.

Zadanie 46. Czy wykresy dwóch różnych rozwiązań danego równania mogą się przecinać w pewnym punkcie (t_0, y_0) jeżeli równaniem tym jest:
a) $y' = y^2 + t$, b) $y' = y^{1/2}$?
Wyznacz możliwie wszystkie takie punkty (t_0, y_0).

Zadanie 47. Wykazać, równoważność Lematów Gronwalla: całkowego z różniczkowym.

Zadanie 48. Używając metody Eulera z krokiem $h = 0,1$ wyznacz przybliżoną wartość rozwiązania dla $t = 1$. Oszacuj błąd jaki popełniamy. Nastęnie znajdź rozwiązanie podanego zagadnienienia i porównaj otrzymaną wartość z wartością rzeczywistą.
a) $y' = 1 + t - y$, $y(0) = 0$, $y' = 2ty$, $y(0) = 2$, $y' = 1 + y^2 - t^2$, $y(0) = 0$.

Zadanie 49. Oszacuj błąd jaki popełniamy używając metody Eulera z krokiem h aby znaleźć przybliżoną wartość rozwiązania zagadnienia $y' = (t^2 + y^2)/2, \quad y(0) = 1$ dla dowolnego $t \in [0, 2/5]$.
Wskazówka: Rozważaj prostokąt R: $0 \le t \le 1, \ 0 \le y \le 2$.

Zadanie 50. Wyznacz odpowiednią wielkość kroku h w metodzie Eulera tak aby błąd, który popełniamy wyznaczając wartośći rozwiązania zagadnienia $y' = e^y - y^2, \quad y(0) = 0$ w dowolnym punkcie $t \in [0, 1/e]$ był nie większy niż 0,0001.

Zadanie 51. Zbadaj ilość rozwiązań w zależności od wartości parametru α:

$$y' = y^\alpha, \ y(0) = 0,$$

Kiedy stosować można twierdzenie Picarda-Lindelöfa?

Zadanie 52. Wykazać, że funkcja f, klasy C^1, spełnia dla dowolnego x warunek Lipschitza

$$|f(y) - f(x)| \le L|x - y|, \ y \in (x - \delta, x + \delta)$$

z pewną stałą $L = L(\delta, x) > 0$ oraz $\delta > 0$. W Twierdzeniu Picarda-Lindolöfa osłabić założenie regularności klasy C^1 nałożonego na funkcję $y \mapsto f(t, y)$ do warunku Lipschitza.

Zadanie 53. Porównać schematy numeryczne (Eulera, zmodyfikowany Eulera i Rungego Kutty) dla równania $y' = 1 + y^2, \ y(0) = 0$ (por. Rozdział 11, http://im0.p.lodz.pl/ bprzeradzki/rrzw.pdf).