Zadanie 66. Dwa rozwiązania $y_1(t)$ i $y_2(t)$ równania liniowego drugiego rzędu, spełniające $W(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) \neq 0$, będziemy nazywali *fundamentalnym zbiorem rozwiązań równania.* Udowodnić, że funkcje $y_1(t) = \sqrt{t}$ i $y_2(t) = 1/t$ tworzą fundamentalny zbiór rozwiązań równania $2t^2y'' + 3ty' - y = 0$. Znaleźć rozwiązanie tego równania spełniające: $y(1) = 2, y'(1) = 1$.

Zadanie 67. Znaleźć rozwiązania następujących zagadnień:
a) $y'' + y' - 10y = 0, \quad y(1) = 5, \quad y'(1) = 2$; b) $y'' + y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2$;
c) $2y'' - y' + 3y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1$; d) $9y'' + 6y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$;

Zadanie 68. Równanie postaci $t^2y'' + \alpha ty' + \beta y = 0, \quad \alpha, \beta -$ stałe, nazywamy *równaniem Eulera.* Udowodnić, że funkcja $y(t) = t^r$ jest rozwiązaniem tego równania o ile $r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0$.

Zadanie 69. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $t^2y'' + 5ty' - 5y = 0$, oraz znaleźć rozwiązanie zagadnienia $t^2y'' - ty' - 2y = 0, \quad y(1) = 0, y'(1) = 1$ dla $t > 0$.

Zadanie 70. Sprawdzić, że $W[e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t] = \beta e^{2\alpha t}$.

Zadanie 71. Załóżmy, że równanie $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$ ma trzy rozwiązania: $t^2, \quad t^2 + e^{2t}, \quad 1 + t^2 + 2e^{2t}$. Znaleźć rozwiązanie ogólne oraz q i p.

Zadanie 72. Równanie $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$ ma rozwiązania: *a)* $3e^t + e^{t^2}$, *b)* $7e^t + e^{t^2}$, *c)* $5e^t + e^{-t^3} + e^{t^2}$. Znaleźć rozwiązanie tego równania spełniające warunki początkowe $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Zadanie 73. Stosując metodę uzmieniania stałych (szukamy $y(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)$, gdzie y_i rozwiązania równania jednorodnego, a c_i szukane "uzmiennione" współczynniki) znaleźć rozwiązanie następujących równań: *a)*$y'' - 4y' + 4y = te^{2t}$, *b)*$2y'' - 3y' + y = (t^2 + 1)e^t$, *c)*$3y'' + 4y' + y = (\sin t)e^{-t}$.

Zadanie 74. Znaleźć jedno szczególne rozwiązanie równań: a) $y'' + 3y = t^3 - 1$, b) $y'' + 4y' + 4y = te^{\alpha t}$, c) $y'' - y = t^2e^t$, d) $y'' + y' + y = 1 + t + t^2$ e) $y'' + 4y = t\sin 2t$, f) $y'' - 2y' + 5y = 2(\cos^2 t)e^t$.

Zadanie 75. Dla jakich wartości k i ω równanie $x'' + k^2x = \sin\omega t$ ma przynajmniej jedno rozwiązanie okresowe?

Zadanie 76. Dla jakich wartości a zagadnienie $y'' + ay = 1$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$, nie ma rozwiązań?

Zadanie 77. Szukamy rozwiązania szczególnego równania $y'' - 2y' + y = te^t$. Sprawdzić przez bezpośrednie podstawienie, że próba szukania rozwiązania szczególnego w postaci $y_1(t) = (a_0 + a_1t)e^t$ lub $y_2(t) = (a_0 + a_1t + a_2t^2)e^t$ prowadzi do sprzeczności. Wyjaśnić, dlaczego szukając rozwiązania w postaci $y(t) = (a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3)e^t$ można przyjąć, że $a_0 = a_1 = 0$.

Zadanie 78. Znaleźć rozwiązanie ogólne równań: *a)* $y'' + ty' + y = 0$, *b)* $y'' - ty = 0$, *c)* $y'' - t^3y = 0$. Zbadać promień zbieżności otrzymanych szeregów potęgowych.

Zadanie 79. Znaleźć rozwiązanie następujących zagadnień: a) $y'' + t^2y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = -1$, b) $t(2-t)y'' - 6(t-1)y' - 4y = 0,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 0$, c) $ty'' - t^2y' + (t^2 - 2)y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

Zadanie 80. W poniższych zagadnieniach znaleźć rekurencyjne wzory na współczynniki w rozwinieciu rozwiązania w szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_nt^n$ lub wyznaczyć kilka pierwszych współczynników szeregu. a) $(1 - t)y'' + ty' + y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$; b) $y'' + ty' + e^ty = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$; c) $y'' + y' + e^{-t}y = 0,\ y(0) = 3,\ y'(0) = 5$;

Zadanie 81. Znaleźć rozwiązania następujących zagadnień: a) $y'' - 5y' + 4y = e^{2t},\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1$; b) $y'' - 3y' + 2y = e^{-t},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$;
c) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = e^{4t},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0$;

Zadanie 82. Znaleźć rozwiązania zagadnień: a) $y'' + y = \sin t,\ y(0) = 1, y'(0) = 2$; b) $y'' + y = t\sin t,\ y(0) = 1, y'(0) = 2$; c) $y'' + y' + y = 1 + e^{-t},\ y(0) = 3, y'(0) = -5$;

Zadanie 83. Ciężarek o masie 1 kg zawieszony na pewnej sprężynie rozciąga ją o 49/320 metra. Ciągniemy ten ciężarek w dół o dodatkowe 1/4 metra i puszczamy. Oblicz amplitudę, okres i częstotliwość powstałych drgań. Przyjmij g=9.8 m/s^2. Rozważ równanie $my'' + cy = f$, gdzie m to masa, a c to wsp. sprężystości, a f to siła zewnętrzna, zaś y opisuje wychylenie od punktu równowagi.