Zadanie 84. Stosując transformatę Laplace'a znaleźć rozwiązania zagadnień: a) $y''+y = \sin t,\ y(0) = 1, y'(0) = 2$; b) $y'' + y = t \sin t,\ y(0) = 1, y'(0) = 2$; c) $y'' + y' + y = 1 + e^{-t},\ y(0) = 3, y'(0) = -5$;

Zadanie 85. Mały ciężarek o masie 1 kg jest zawieszno na sprężynie o stałej sprężystości równej 2 N/m. Cały układ jest zanurzony w lepkiej cieczy o współczynniku tłumienia 3 Ns/m. W chwili $t = 0$ ciężarek wychylono o 1/2 m od położenia równowagi. Udowodnij, że po zwolnieniu ciężarka powróci on bezpośrednio do stanu równowagi gdy $t \to \infty$.

Zadanie 86. Mały ciężarek o masie 1 kg jest zawieszno na sprężynie o stałej sprężystości równej 1 N/m. Cały układ jest zanurzony w lepkiej cieczy o współczynniku tłumienia 2 Ns/m. W chwili $t = 0$ ciężarek wychylono o 1/4 m od położenia równowagi. Udowodnij, że po nadaniu ciężarkowi w chwili początkowej prędkości 1 m/s, minie on położenie równowagi, a następnie powoli powróci do stanu równowagi gdy $t \to \infty$.

Zadanie 87. Na ciężarek o masie 4 kg, zawieszony na sprężynie o stałej strężystości 64 N/m, działa okresowo siła $F(t) = A\cos^3 \omega t$. Znajdź wszystkie wartości ω, dla których zachodzi rezonans. Tłumienie drgań pomijamy.

Zadanie 88. Działo w czołgu jest przymocowane do układu pochłaniającego drgania o stałej sprężystości $100\alpha^2$ i stałej tłumienia 200α (w odpowiednich jednostkach). Masa działa wynosi 100 kg. Załóżmy, że funkcja $y(t)$ opisująca wychylenie działa ze stanu spoczynku po oddaniu strzału w chwili $t = 0$, spełnia zagadnienie początkowe

$$100y'' + 200\alpha y' + 100\alpha^2 y = 0; \quad y(0) = 0,\ \ y'(0) = 100 \text{ m/s}.$$

Wymaga się, aby po oddaniu strzału wielkość $y^2 + (y')^2$ była mniejsza niż 0,01. Jak duże musi być α żeby to zagwarantować pół sekundy po oddaniu strzału?

Zadanie 89. Znajdź rozwiązania następujących zagadnień

a) $\bar{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \bar{x}, \quad \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

b) $\bar{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \bar{x}, \quad \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

c) $\bar{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \bar{x}, \quad \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Zadanie 90. Niech $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$. Udwodnij, że $e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix}$.

Zadanie 91. Niech $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Udwodnij, że $e^{At} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Zadanie 92. Oblicz e^{At} dla macierzy A równej $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Zadanie 93. Niech

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Uzasadnij, że $A^2 = -I$ i wykorzystując ten fakt udowodnij, że $e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$.