Zadanie 95. Zapisz w postaci wektorowej $\bar{x}' = A\bar{x}$, $\bar{x}(t_0) = \bar{x}^0$ następujące układy, a następnie rozwiąż: a) $x_1' = 3x_1 - 7x_2, \quad x_2' = 4x_1, \qquad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1;$
b) $x_1' = x_1 + x_2 - x_3, \quad x_2' = x_1, \quad x_3' = -x_2, \qquad x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 3 \quad x_3(0) = 4;$

Zadanie 96. Obliczając wartości własne i wektory własne macierzy, podaj rozwiązanie ogólne:

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\bar{x}, \quad \bar{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\bar{x}, \quad \bar{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}\bar{x}, \quad \bar{x}' = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}\bar{x}.$$

Zadanie 97. Obliczając wartości własne i wektory własne macierzy układu, rozwiąż następujące zagadnienia początkowe

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\bar{x}, \quad \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \qquad \bar{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}\bar{x}, \quad \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 98. Obliczając wartości własne i wektory własne macierzy układu, rozwiąż zagadnienia początkowe $\bar{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\bar{x}, \quad \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}; \bar{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\bar{x}, \quad \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Zadanie 99. Wyznacz wszystkie wektory $\bar{x}^0$ takie, że $\bar{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\bar{x}, \quad \bar{x}(0) = \bar{x}^0$ ma rozwiązanie okresowe.

Zadanie 100. Znajdź bazę rozwiązań następujących układów równań liniowych sprowadzając je do jednego równania wyższego rzędu oraz porównaj z rozwiązaniami uzyskanymi przez rozwiązanie układu.

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\bar{x}, \quad \bar{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\bar{x}, \quad \bar{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\bar{x}, \quad \bar{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\bar{x}.$$

Zadanie 101. Oblicz e^{At} dla macierzy A równej

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Zadanie 102. Znajdź macierz A, dla której $e^{At} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} - e^t & e^{2t} - e^t & e^t - e^{2t} \\ e^{2t} - e^t & 2e^{2t} - e^t & e^t - e^{2t} \\ 3e^{2t} - 3e^t & 3e^{2t} - 3e^t & 3e^t - 2e^{2t} \end{pmatrix}$.

Zadanie 103. Załóżmy, że $\bar{\phi}_j(t)$ $(j = 1, 2, ..., n)$ są rozwiązaniami zagadnienia $\bar{x}' = A\bar{x}$, $\bar{x}(0) = \bar{e}^i$ $(\bar{e}^i = (0, ..., 1, ...0)$ – jedynka na i-tym miejscu). Udowodnij, że $e^{At} = (\bar{\phi}_1(t), ..., \bar{\phi}_n(t))$.

Zadanie 104. Znajdź rozwiązania następujących zagadnień wykorzystując czynnik całkujący e^{-At} dla równania $x' - Ax = f$:

a) $\bar{x}' = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\bar{x} + \begin{pmatrix} 4e^t \cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$

b) $\bar{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\bar{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^t, \qquad \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$

c) $\bar{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\bar{x} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}, \qquad \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$