Zadanie 105. Zbadać stabilność rozwiązania zerowego na prostej rozwiązując układ:
a) $y' = y$, b) $y' = -y$, c) $y' = 0$, d) $y' = y^2$, e) $y' = -y^2$, f) $y' = y^3$.

Zadanie 106. Ustal czy rozwiązania stacjonarne $x(t) \equiv 0$ i $x(t) \equiv 1$ równania $x' = x(1-x)$ są stabilne czy niestabilne w sensie Lapunowa. Zrób to zadanie na dwa sposoby: bezpośrednion, badając rozwiązania, oraz konstruując funkcję Lapunowa (tylko w przypadku stabilności, por. Z. 112).

Zadanie 107. Podobne polecenie dla rozwiązań $x(t) \equiv 0$ i $x(t) \equiv 1$ równania $x' = -x(1-x)$.

Zadanie 108. Rozważamy równanie różniczkowe $x' = x^2$. Udowodnij, że wszystkie rozwiązania z warunkiem początkowym $x(0) \geq 0$ są niestabilne, natomiast rozwiązania z warunkiem początkowym $x(0) < 0$ są stabilne w sensie Lapunowa.

Zadanie 109. Zbadać stabilność rozwiązania $x = y = 0$ układów:
a) $x' = -y,\quad y' = 2x^3$; b) $x' = y,\quad y' = \sin x$; c) $x' = y,\quad y' = \operatorname{tg} x$.

Zadanie 110. Zbadać punkty stacjonarne układu $x' = xy + 12,\quad y' = x^2 + y^2 - 25$ i określić ich stabilność.

Zadanie 111. Udowodnij, że stabilność rozwiązań dowolnego rozwiązania $\bar{x}(t)$ równania niejednorodnego $\bar{x}' = A\bar{x} + \bar{f}(t)$ jest równoważna stabilności rozwiązania stacjonarnego $\bar{x} \equiv 0$ równania jednorodnego $\bar{x}' = A\bar{x}$.

Zadanie 112. Podać przykład układu równań, do którego można zastosować Twierdzenia Lapunowa o niestabilności:
Niech dana będzie funkcja $V(x)$ klasy C^1 w pewnym zbiorze Q, będącym otoczeniam początku układu współrzędnych. Jeżeli funkcja $V(x)$ spełnia warunki:
i) $V(0) = 0$,
ii) dla każdgo $\varepsilon > 0$ istnieje x, taki że $|x| < \varepsilon$ i $V(x) > 0$,
iii) $\nabla V \cdot f > 0$ dla $x \in Q \setminus \{0\}$,
to rozwiązanie zerowe równania autonomicznego $x' = f(x)$ nie jest stabilne w sensie Lapunowa.
Uwaga. W przypadku stabilności ii) zastępujemy dodatniością, a w iii) zmieniamy znak.

Zadanie 113. Udowodnić, że rozwiązanie równania $x' = a(t)x$, gdzie $a(t)$ jest funkcją ciągłą, jest stabilne w sensie Lapunowa wtedy i tylko wtedy, gdy $\limsup_{t\to+\infty} \int_0^t a(s)\,ds < +\infty$.

Zadanie 114. Zbadać stabilność lub brak stabilności rozwiązania zerowego układów równań:
a) $x' = x^3 - y,\quad y' = x + y^3$;
b) $x' = y - x + xy,\quad y' = x - y - x^2 - y^3$;
c) $x' = 2y^3 - x^5,\quad y' = -x - y^3 + y^5$.

Zadanie 115. Załóżmy, że przynajmniej jedna wartość własna operatora liniowego A na $\mathbb{R}^n$ ma ściśle dodatnią część rzeczywistą. Pokazać, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje rozwiązanie równania $\dot{x} = Ax$ takie, że $\|x(0)\| < \varepsilon$ oraz $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = \infty$.

Zadanie 116. Znaleźć warunek konieczny i dostateczny na stabilność rozwiązania zerowego układu dwóch równań liniowych jednorodnych o stałych współczynnikach.

Zadanie 117. Dany jest układ równań $x'' = f(x)$ z niewiadomą $x = (x_1, ..., x_n)$, gdzie $f(x) = -\nabla\Phi(x) = -\left(\frac{\partial\Phi}{x_1}, \ldots, (\frac{\partial\Phi}{x_n}\right)$, a $\Phi(x)$ jest funkcją skalarną klasy C^2. Sprawdzić, że funkcja $U(A, B) = (A_1^2 + \ldots + A_n^2)/2 + \Phi(B)$ spełnia tożsamość $\frac{d}{dt}U(x'(t), x(t)) = 0$ dla dowolnego rozwiązania tego układu. Funkcja U nazywa się *całką pierwszą* tego układu. Porównaj z przypadkiem skalarnym, tzn. $n = 1$ przedstawionym na wykładzie jako układy zachowawcze z jednym stopniem swobody. W przypadku ogólnym $n \geq 1$ mamy do czynienia z układem zachowawczym z n-stopniami swobody.