Zadanie 118. Zbadać ograniczoność rozwiązań równania

$$x''(t) + ax(t) = \sin(t)$$

z warunkiem początkowym

$$x(0) = 0,\ x'(0) = 1$$

w zależności od parametru $a \in I\!R$. Podaj interpretację w kontekście oscylatora harmonicznego.

Zadanie 119. Rozważmy równanie różniczkowe zwyczajne z warunkami brzegowymi:
$\frac{d^2u}{dx^2} + u = 0, \quad u(0) = 0,\ u(L) = 0.$
Oczywiście funkcja $u(x) \equiv 0$ jest rozwiązaniem tego zagadnienia. Czy jest to jedyne rozwiązanie? Czy odpowiedź zależy od L?

Zadanie 120. Dla jakich wartości λ zagadnienie $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi)$ ma nietrywialne rozwiązanie?

Zadanie 121. Rozwiąż zagadnienie brzegowe $u'' = 0$ dla $0 < x < 1,\ u'(0) + ku(0) = 0,\ u'(1) \pm ku(1) = 0$
dla każdej stałej k. Rozważaj przypadki $+$ i $-$ osobno. Dlaczego przypadek z $k = 2$ jest wyróżniony?

Zadanie 122. Wyznacz graficznie wartości własne zagadnienia
$-X'' = \lambda X, \qquad X(0) = 0, \quad X'(1) + aX(1) = 0$
dla pewnej stałej $a \neq 0$.

Zadanie 123. Znajdź wartości własne i odpowiadające im funkcje własne zagadnienia
$\frac{d^4X}{dx^4} = \lambda X, \qquad X(0) = X(1) = X''(0) = X''(1) = 0.$

Zadanie 124. Znajdź wartości własne i odpowiadające im funkcje własne zagadnienia
$\frac{d^4X}{dx^4} = \lambda X, \qquad X(0) = X'(0) = X(1) = X'(1) = 0.$

Zadanie 125. Sprawdź, że $u(x, y) = f(x)g(y)$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego cząstkowego $uu_{xy} = u_x u_y$ dla dowolnych różniczkowalnych funkcji f, g jednej zmiennej.

Zadanie 126. Sprawdź, że $u_n(x, y) = \sin nx \sinh ny$ jest rozwiązaniem równania $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Zadanie 127. Znajdź rozwiązania ogólne $u = u(x, y)$ następujących równań całkując stronami:
$a) u_x = 1, \qquad b) u_y = 2xy, \qquad c) u_{yy} = 6y, \qquad d) u_{xy} = 1, \qquad e) u_x + y = 0, \qquad f) u_{xxyy} = 0.$

Zadanie 128. Znajdź, przez obsustronne scałkowanie, funkcję $u = u(x, y)$ spełniającą równanie oraz warunki brzegowe:
a) $u_{xx} = 6x; \qquad u(0, y) = y, \quad u(1, y) = y^2 + 1,$
b) $yu_{yy} + u_y = 0, \qquad u(x, 1) = x^2, \quad u(x, e) = 1,$
c) $u_{xx} + 2u_x = 0, \qquad u(0, y) = 1, \quad u(1, y) = 1/(e^2).$

Zadanie 129. Znaleźć rozwiąznie ogólne równania $3u_y + u_{xy} = 0$ (Wsk. Podstawić $v = u_y$.). Czy istnieje jedyne rozwiązanie przy dodatkowych warunkach $u(x, 0) = e^{-3x}, \quad u_y(x, 0) = 0$.

Zadanie 130. Rozwiązać metodą charakterystyk równanie $2u_t + 3u_x = 0$ przy dodatkowym warunku $u = \sin x$ dla $t = 0$.

Zadanie 131. Rozwiązać równanie $(1 + x^2)u_x + u_y = 0$. Naszkicować charakterystyki.

Zadanie 132. Rozwiązać metodą charakterystyk równanie $\sqrt{1 - x^2}u_x + u_y = 0$ przy warunku $u(0, y) = y$.

Zadanie 133. Rozwiązać $au_x + bu_y + cu = 0$, gdzie a, b, c są stałymi. Wsk. Szukać rozwiązania w postaci $u(x, y) = v(x, y)e^{\alpha x}$ dla specjalnie wybranego $\alpha \in I\!R$..

Zadanie 134. Rozwiązać równanie $u_x + u_y + u = 0$ przy warunku $u(x, 0) = 0$.

Zadanie 135. Znaleźć rozwiązanie ogólne $= u(x, y)$ równania $xu_x + yu_y = 0$.