Zadanie 136. Znaleźć szereg Fouriera funkcji
$f(x) = x$ na $(-\pi, \pi)$ $f(x) = |x|$ na $(-\pi, \pi)$ $f(x) = |x|$ na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$
$f(x) = x^2$ na $(0, 2\pi)$ $f(x) = e^x$ na $(0, 2\pi)$ $f(x) = e^x$ na $(-\pi, \pi)$

Zadanie 137. Rozwiń następujące funkcje określone na przedziale $(-1, 1)$ przedłużając je okresowo na całą prostą w szereg Fouriera:
a) x^2, *b)* x, *c)* $|x|$, *d)* $\sin(3\pi x)$, *e)* $\cos(2\pi x)$, *f)* $\cos(\pi x) + cos(3\pi x)$.

Zadanie 138. Rozwiń w szereg Fouriera następujące funkcje f określone na przedziale $(0, 1)$ przedłużając je do funkcji
(i) parzystej na $(-1, 1)$,
(ii) nieparzystej na $(-1, 1)$,
a następnie na całą prostą:
a) x^2, *b)* x, *c)* $|x|$, *d)* $\sin(\pi x)$, *e)* $\cos(\pi x)$, *f)* 1.

Zadanie 139. Znaleźć związek między potęgowymi oszacowaniami na współczynniki szeregu Fouriera, a klasą rózniczkowalności funkcji zadanej przez ten szereg. Rozważać należy funkcję okresową określoną na całej prostej.

Zadanie 140. Co należy założyć o funkcji określonej na przedziale $[0, a]$ aby można było ją przedłużyć do funkcji nieparzystej (parzystej) na przedział $[-a, a]$, a następnie du funkcji ciągłej, różniczkowalnej, klasy C^k.

Zadanie 141. Skonstruuj rozwiązanie następujących zagadnień metodą rozdzielania zmiennych: a) $u_t = u_y$, $u(0, y) = e^y + e^{-2y}$; b) $u_t = u_y + u$, $u(0, y) = 2e^{-y} - e^{2y}$.

Zadanie 142. Rozdzielając zmienne rozwiąż równanie $tu_t = u_{xx} + 2u$ z warunkami brzegowymi $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$. Udowodnij, że równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań spełniających warunek początkowy $u(x, 0) = 0$. Tak więc, w tym przypadku brak jest jednoznaczności rozwiązań!

Zadanie 143. Rozwiąż równanie dyfuzji $u_t = u_{xx}$, $0 < x < 1$, z mieszanym warunkiem brzegowym: $u(0, t) = u_x(1, t) = 0$ i warunkiem początkowym $\varphi(x)$.

Zadanie 144. Rozważamy równanie dyfuzji $u_t = u_{xx}$, $-1 < x < 1$, z okresowymi warunkami brzegowymi: $u(-1, t) = u(1, t)$ oraz $u_x(-1, t) = u_x(1, t)$. Udowodnij, że rozwiązanie ma następującą postać $u(x, t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x\Big) e^{-n^2\pi^2 t}$.

Zadanie 145. Znajdź rozwiązanie równania $u_{xx} + u_{yy} = 0$ w prostokącie $0 < x < a$, $0 < y < b$ spełniające następujące warunki brzegowe:
$u_x = -a$ dla $x = 0$, $u_x = 0$ dla $x = a$,
$u_y = b$ dla $y = 0$, $u_y = 0$ dla $y = b$.
(Wsk. To zadanie można zrobić na dwa sposoby: metodą Fouriera rozdzielania zmiennych lub można szukać rozwiązania w postaci wielomianu.)

Zadanie 146. Znajdź rozdzielając zmienne rozwiązanie zagadnienia
$u_t = u_{xx} + u$, $x \in (0, 1)$; $u(x, 0) = \cos x$, $u(0, t) = u(1, t) = 0$.

Zadanie 147. Dla osób zainteresowanych dodatkowymi zadaniami z rozwiązaniami:

http://math.uni.lodz.pl/~karpinw/zadania/RRCz1/II_rzad_zadania.PDF

Zadanie 148. Podać przykłady zagadnień początkowych dla cząstkowych równań liniowych pierwszego i drugiego rzędu, które posiadają:
a) dokładnie jedno rozwiązanie, b) wiele rozwiązań, c) zero rozwiązań.

Zadanie 149. Dla równania $yu_x - xu_y = 0$ zbadać istnienie i jednoznaczność rozwiązań przy warunku: a) $u(0, y) = y$, b) $u(\sqrt{1 - y^2}, y) = 2$, c) $u(\sqrt{1 - y^2}, y) = y$.

Zadanie 150. Dla równania $xu_x - yu_y = 0$ zbadać istnienie i jednoznaczność rozwiązań przy warunku: a) $u(y, y) = y^2$, b) $u(1/y, y) = 1$, c) $u(1/y, y) = y$.