**Zadanie 151.** Rozwiązać zagadnienie początkowo-brzegowe z równaniem ciepła: $u_t = u_{xx}, \quad u(0,x) = sgn(x), x \in (-1,1) \quad u(t,0) = u(t,1) = 0, t > 0$ rozwijając funkcję znaku $sgn(x)$ w szereg Fouriera na $(-1,1)$ (ew. równoważnie na przedziale $(0,1)$ względem sinusów funkcję stale równą jeden) i przedłużając zagadnienie okresowo ze względu na $x$ z okresem 2. Wykazać, że rozwiązanie jest dwukrotnie różniczkowalne dla $t > 0$, wykorzystując zbieżność jednostajną odpowiednich szeregów pochodnych. Zinterpretować efekt regularyzacji parabolicznej tzn. poprawiania regularności rozwiązania startującego z funkcji nieciągłej.

**Zadanie 152.** Rozwiązać zagadnienie początkowo-brzegowe z równaniem ciepła: $u_t = u_{xx}, \quad u(0,x) = \frac{1}{2} - |x - \frac{1}{2}|, x \in (-1,1) \quad u(t,0) = u(t,1) = 0, t > 0$ przedłużając zagadnienie okresowo ze względu na $x$ z okresem 2. Wykazać, że rozwiązanie jest dwukrotnie różniczkowalne dla $t > 0$, a ciągłe dla $t \geq 0$. Zinterpretować efekt regularyzacji parabolicznej tzn. poprawiania regularności rozwiązania startującego z funkcji ciągłej.

**Zadanie 153.** Rozwiń w szereg Fouriera następujące funkcje $f$ określone na przedziale $(0,1)$ przedłużając je do funkcji
(i) parzystej na $(-1,1)$,
(ii) nieparzystej na $(-1,1)$,
a następnie na całą prostą:
*a)* $x^2$, *b)* $x$, *c)* $|x|$, *d)* $\sin(\pi x)$, *e)* $\cos(\pi x)$, *f)* 1, a następnie wykorzystaj to do rozwiązania równania ciepła i fali z warunkiem początkowym $f(x)$ dla $x \in (0,1)$ dla $t = 0$ (dla równania falowego załóż dodatkowo, że $u_t(0,x) = 0$) oraz warunkiem brzegowym zerowym $u(t,0) = u(t,1) = 0$ dla $t > 0$. Uzasadnij, że okresowo przedłużone $u$ odpowiada rozwiązaniu w postaci d'Alamberta na prostej.

**Zadanie 154.** Sprawdź, że $u_n(x,y) = \sinh nx \sin ny$ jest rozwiązaniem równania $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Jakie równanie spełniają funkcje $z_n(x)$ jeśli poszukujemy rozwiązań tego równania w postaci $u_n(x,y) = \sin ny z_n(x)$, a jakie gdy $u_n(x,y) = \sinh ny z_n(x)$. Sformułuj odpowiednie warunki brzegowe dla $x = 0$ i $x = \pi$ tak aby $u$ było rozwiązaniem odpowiedniego zagadnienia brzegowego w wyżej wymienionych przypadkach. Jakie warunku początkowe na $u(x,0)$ i $u_y(x,0)$ dla $x \in (0,\pi)$ należy sformułować aby jedna z funkcji $u_n$ była rozwiązaniem zagadnienia początkowo-brzegowego dla równania Laplace'a? Podobne pytanie można sformułować dla kombinacji fukcji $u_n$ oraz nieskończonej kombinacji $u_n$ czyli opdowiedniego szeregu Fouriera ze względu na jedną zmienną.

**Zadanie 155.** Rozwiązać zagadnienie początkowo-brzegowe z równaniem falowym (struny): $u_{tt} = u_{xx}, \quad u(0,x) = f(x), u_t(x,0) = 0, x \in (-1,1) \quad u(t,0) = u(t,1) = 0, t > 0$ rozwijając funkcję $f(x) = sgn(x)$ w szereg Fouriera na $(-1,1)$ (ew. równoważnie na przedziale $(0,1)$ względem sinusów funkcję stale równą jeden) i przedłużając zagadnienie okresowo ze względu na $x$ z okresem 2. Analogicznie dla $f(x) = 1/2 - |x - 1/2|$. Wykazać, że rozwiązanie jest dwukrotnie różniczkowalne, ale nie wszędzie dla $t > 0$. Pokazać, że nieciągłości warunku początkowego czy też jego pochodnej zadanego dla $t = 0$ przenoszą się wewnątrz obszaru wzdłuż charakterystyk dla $t > 0$ na rozwiązanie i nie mamy tu efektu regularyzacji parabolicznej rozwiązania jak w równaniu ciepła.

**Zadanie 156.** Sprowadzić równanie Blacka-Scholesa

$$v_\tau = \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 v_{ss} + (r - \delta) s v_s - rv = 0$$

przez zamianę zmiennych $Ku(t,x) = v(T - \frac{2t}{\sigma^2}, Ke^x) = v(\tau, s)$, $\tau = T - \frac{2t}{\sigma^2}, s = Ke^x$ do równania o stałych współczynnikach $u_t = u_{xx} + (\frac{2(r-\delta)}{\sigma^2} u_x - \frac{2r}{\sigma^2} u = 0$, które przez podstawienie $w(t,x) = \exp(at + bx)u(t,x)$ sprowadza się do równania ciepła z rozwiązaniem danym przez wzór $w(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}$ (sprawdzić!). Więcej szczegółów znajdziecie w: *Rafał Ciesielski "Model Blacka-Scholesa"*