Zadanie 162. Rozważmy równanie

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + e(x,y)u_x + f(x,y)u_y + g(x,y)u = h(x,y).$$

Wykazać, że zamiana zmiennych $u(x,y) = v(\xi,\eta)$, gdzie $\xi(x,y)$ jest charakterystyką, a funkcja η jest drugą z charakterystyk w przypadku eliptycznym (dokładniej ξ część rzeczywista charakterystyki zespolonej, a η część urojona) bądź hiperbolicznym oraz dowolną liniowo niezależną funkcją w przypadku prabolicznym, pozwala sprowadzić równanie do postaci kanonicznej.

Zadanie 163. Przedstawić interpretację geometryczną charakterystyk dla równania jednorodnego i niejednorodnego

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = r(x,y)$$

oraz ich związki z poziomicami oraz wykresem funkcji u.

Zadanie 164. Przypomnieć twierdzenie Lebesgue'a-Riemanna dotyczącego zbieżności współczynników Fouriera danej funkcji. Przy jakich założeniach na funkcję zachodzi to twierdzenie?

Zadanie 165. Znaleźć związek między wzorem d'Alamberta a rozwiązaniem metodą Fouriera dla okresowych warunków początkowych dla zagadnienia początkowego dla równania fali, w przypadku:
a) danych początkowych parzystych,
b) danych początkowych nieparzystych,
c) danych początkowych będących funkcjami: parzystą i nieparzystą.

Zadanie 166. Korzystając z poprzedniego zadania sprawdzić jak dla funkcji początkowej

$$f(x) = x, \quad x \in (-1,1)$$

przedłużonej okresowo na prostą rzeczywistą do funkcji posiadającej skoki wygląda regularność rozwiązania równania fali u z zerowym warunkiem początkowym na u_t dla $x \in (-1,1)$.

Zadanie 167. Porównać rozwiązanie poprzedniego zadania z odpowiednim zagadnieniem początkowym dla równania ciepła.

Zadanie 168. Podać przykłady zagadnień początkowych dla cząstkowych równań liniowych pierwszego i drugiego rzędu, które posiadają:
a) dokładnie jedno rozwiązanie,
b) wiele rozwiązań,
c) zero rozwiązań.

Zadanie 169. Zinterpretować twierdzenie o funkcji uwikłanej w przypadku równania opisującego:
a) okrąg,
b) sferę,
c) elipsę,
oraz ułożyć równanie pierwszego rzędu, ktorgo wykres zawiera się w wyżej wymienionych zbiorach.

Zadanie 170. Zbadać zbieżność trzech wybranych szeregów (dla różnych typów równań), które otrzymywaliśmy jako rozwiązania równań metodą Fouriera. Wskazać różnice i podobieństwa.