Zadanie 1. Sprawdź, czy podana funkcja jest rozwiązaniem podanego równania różniczkowego:
a) $x(t) = \operatorname{tg} t, \quad x' = 1 + x^2,$ b) $x(t) = \frac{\sin t}{t}, \quad tx' + x = \cos t.$

Równania o zmiennych rozdzielonych

Zadanie 2. Znaleźć rozwiązania ogólne następujących równań różniczkowych o rozdzielonych zmiennych i naszkicować ich wykresy dla różnych stałych C:
a) $y' = e^{x+y}$, b) $y' = \sqrt{x}/y$, c) $y' = \sqrt{y/x}$.
Zadanie 3. Znajdź rozwiązania następujących równań spełniających podany warunek początkowy:
a) $y' = 2,\ y(0) = 2,$ b) $y' = y/x,\ y(1) = 5,$ c) $y' = -y^2e^x,\ y(0) = 1/2.$
Zadanie 4. Rozwiąż równania nie rozdzielając różniczek dy i dt (czyli całkując metodą "klasyczną"):
a) $y' = (1 + t)(1 + y),$ *b)* $y' = e^{t+y+3}$.
Zadanie 5. Rozwiąż zagadnienia początkowe nie rozdzielając różniczek dy i dt:
a) $xyy' = \ln x,\ \ y(1) = 1,$ *b)* $y' = -y^2e^x;\ \ y(0) = 1/2.$
Zadanie 6. Równania postaci $dy/dt = f(y/t)$, gdzie f jest daną funkcją, nazywamy równaniem jednorodnym. Udowodnij, jeżeli y jest rozwiązaniem równania jednorodnego, to funkcja $v(t) = y(t)/t$ spełnia równanie o zmiennych rozdzielonych $t(dv/dt) + v = f(v)$.
Zadanie 7. Rozwiąż równania jednorodne:
$2x + t - tx' = 0, \quad tx' = x - te^{x/t}, \quad tx' = x\cos\left(\log\frac{x}{t}\right).$
Zadanie 8. Dla danej rodziny krzywych znajdź trajektorie ortogonalne:
$y = Cx^2, \quad y = C\sin x, \quad y = Ce^x, \quad x^2 + y^2 = Cx.$

Równania liniowe pierwszego rzędu

Zadanie 9. Znajdź całkę ogólną (tzn. rozwiązanie ogólne) równań liniowych mnożąc je przez odpowiedni czynnik całkujący:
$x' + x\cos t = 0, \quad x' + t^2x = t^2, \quad x' + \frac{2t}{1+t^2}x = \frac{1}{1+t^2}, \quad x' + x = te^t.$
Zadanie 10. Rozwiąż następujące zagadnienia początkowe bez znajdowania rozwiązania ogólnego:
$y' + \sqrt{1+t^2}y = 0, \quad y(0) = \sqrt{5}; \qquad y' + ty = 1 + t, \quad y(3/2) = 0.$
Zadanie 11. Jaki warunek muszą spełniac funkcje $p(t)$ i $q(t)$ występujące w równaniu liniowym postaci $x' + a(t)x = f(t)$, by było ono również równaniem o zmiennych rozdzielonych. Rozwiąż je w sposób właściwy dla tego typu równań.
Zadanie 12. Udowodnij, że dla równania $x' + a(t)x = f(t)$, gdzie a i f są funkcjami ciągłymi, $a(t) \geqslant c > 0$, oraz $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$, zachodzi relacja $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.
Zadanie 13. Udowodnij, że równanie Bernoulliego $x' + a(t)x = b(t)x^m$, $m \in \mathbb{R}$, sprowadza się przez zamianę zmiennych $z(t) = x(t)^{1-m}$ do równania liniowego. Rozwiąż równania: $tx' + x = x^2\log t$, $x' = tx + t^3x^2$.
Zadanie 14. Równanie postaci $x' + a(t)x = b(t)x^2 + f(t)$, gdzie a, b, f są danymi funkcjami, nazywa się równaniem Riccatiego. Nie istnieje ogólny sposób całkowania tego równania. Udowodnij, że jeżeli znamy jedno rozwiązania $x_1(t)$, to funkcja $u(t) = x(t) - x_1(t)$ spełnia równanie Bernoulliego.
Zadanie 15. Znaleźć rozwiązania szczególne następujących równań Riccatiego, zredukować je do równań typu Bernoulliego i scałkować:
$t^2x' + tx + t^2x^2 = 4, \quad x' + 2xe^t - x^2 = e^{2t} + e^t.$

Równania zupełne

Zadanie 16. W podanych równaniach dobierz stałą a tak, aby było ono zupełne, a następnie rozwiąż je: $t + ye^{2ty} + ate^{2ty}y' = 0, \qquad \frac{1}{t^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{(at+1)}{y^3}y' = 0.$

Zadanie 17. Znajdź wszystkie funkcje $f(t)$, dla których równanie $y^2 \sin t + yf(t)(dy/dt) = 0$ jest zupełne. Rozwiąż równanie dla tych f.
Zadanie 18. Znaleźć współczynnik $f = f(t)$ w równaniu $f(t)x' + t^2 + x = 0$, jeżeli wiadomo, że ma ono czynnik całkujący postaci $u(t) = t$.
Zadanie 19. Równanie liniowe niejednorodne $(dy/dt) + a(t)y = b(t)$ nie jest zupełne. Znajdź czynnik całkujący.
Zadanie 20. Rozwiązać równania w postaci różniczek zupełnych:
$2tx\, dt + (t^2 - x^2)\, dx = 0, \quad e^{-x}\, dt - (2x + te^{-x})\, dx = 0.$
Zadanie 21. Sprawdź, że podana funkcja $\mu(x, t)$ jest czynnikiem całkującym danego równania. Rozwiąż równanie.
a) $6xy\, dx + (4y + 9x^2)\, dy = 0, \quad \mu(x, t) = y^2$
b) $-y^2\, dx + (x^2 + xy)\, dy = 0, \quad \mu(x, y) = 1/(x^2 y)$
c) $y(x + y + 1)\, dx + (x + 2y)\, dy = 0, \quad \mu(x, y) = e^x$
Zadanie 22. Równanie różniczkowe może mieć więcej niż jeden czynnik całkujący. Udowodnij, że $\mu_1(x, y) = 1/(xy)$, $\mu_2(x, y) = 1/y^2$, $\mu_3(x, y) = 1/(x^2 + y^2)$ są czynnikami całkującymi równania $y\, dx - x\, dy = 0$. Uzasadnij, że otrzymane przy pomocy tych czynników całkujących rozwiązania są równoważne.
Zadanie 23. Scałkować równania metodą czynnika całkującego:
$\left(\frac{x}{y} + 1\right) dx + \left(\frac{x}{y} - 1\right) dy = 0, \qquad (x^2 + y)dx - xdy = 0, \qquad (y + x^2)dy + (x - xy)dx = 0.$
Zadanie 24. Uzasadnij, że równanie o zmiennych rozdzielonych $M(t) + N(y)(dy/dt) = 0$ jest zupełne.
Zadanie 25. Uzasadnij, że jeżeli $\partial M/\partial y = \partial N/\partial t$, to wyrażenie $M(t, y) - \int(\partial N(t, y)/\partial t)dy$ nie zależy od od y (tzn. zależy tylko od t).

Zastosowania równań I-go rzędu

Zadanie 26. Pewna osoba uczy się pisać na maszynie. Niech N oznacza maksymalną liczbę słów jakie potrafi napisać ona napisać w ciągu minuty. Załóżmy, że prędkość zmian N (tzn. $N'(t)$) jest proporcjonalna do różnicy pomiędzy N oraz górną granicą 140. Rozsądnym jest założyć, że na początku osoba ta nie potrafiła napisać żadnego słowa (tzn. $N(0) = 0$). Okazało się, że osoba ta potrafi napisać 35 słów na minutę po 10 godzinach uczenia się.
a) Ile słów na minutę będzie pisać ta osoba po 20 godzinach uczenia się?
b) Jak długo musi ona ćwiczyć, aby napisać 105 słów na minutę?
Zadanie 27. Plotka rozprzestrzenia się w populacji liczącej 1000 osób z prędkością proporcjonalną do iloczynu liczby osób, które już słyszały tę plotkę oraz liczby osób, które jeszcze nie słyszały tej plotki. Załóżmy, że 5 osób rozprzestrzenia plotkę i po jednym dniu wie o niej już 10 osób. Ile czasu potrzeba, aby o plotce dowiedziało się 850 osób?
Zadanie 28. *(Inny model rozprzestrzeniania się plotki).* Załóżmy teraz, że plotka rozprzestrzenia się w populacji liczącej 1000 osób według prawa Gompertza:

$$\frac{dy}{dt} = kye^{-(73/520)t},$$

gdzie $y(t)$ jest liczą osób, które słyszały plotkę po t dniach. Załóżmy, że 5 osób rozprzestrzenia plotkę i po jednym dniu wie o niej już 10 osób. Ile czasu potrzeba, aby o plotce dowiedziało się 850 osób?
Zadanie 29. Epidemia grypy w populacji liczącej 50000 osób rozprzestrzenia się według prawa Gompertza:

$$\frac{dy}{dt} = kye^{-0{,}03t},$$

gdzie $y(t)$ oznacza liczbę zarażonych grypą po t dniach. Załóżmy, że na początku było 100 chorych, a po 10 dniach – 500. Kiedy połowa populacji będzie zarażona?

Zadanie 30. Wiadomo, że szybkość zmian temperatury danego ciała jest proporcjonalna do różnicy między temperaturą tego ciała i temperaturą otoczenia (prawo Newtona). Zakładamy, że $S(0) = 100^oC$ w temperaturze otoczenia 20^oC. Po dziesięciu minutach temperatura ciała wynosiła 60^oC. Po ilu minutach ciało będzie miało temperaturę 25^oC?

Zadanie 31. Ciało zamordowanego znaleziono o 19:30. Lekarz sądowy przybył o 20:20 i natychmiast zmierzył temperaturę ciała denata. wynosiła ona $32,6^o$ C. Godzinę później, gdy usuwano ciało, temperatura wynosiła $31,4^o$C. W tym czasie temperatura w pomieszczeniu wynosiła 21^oC. Najbardziej podejrzana osoba, która mogła popełnić to morderstwo – Jan G., twierdzi jednak, że jest nie winny. Ma alibi. Po południu był on w restauracji. O 17:00 miał rozmowę zamiejscową, po której natychmiast opuścił restaurację. Restauracja znajduje się 5 minut na piechotę od miejsca morderstwa. Czy alibi to jest niepodważalne?

Zadanie 32. *(Ciąg dalszy zadania poprzedniego).* Obrońca Jana G. zauważył, że zamordowany był u lekarza o 16:00 w dniu śmierci i wtedy jego temperatura wynosiła $38,3^o$C. Załóżmy, że taką temperaturę miał on w chwili śmierci. Czy można dalej podejrzewać, że Jan G. popełnił to morderstwo?

Zadanie 33. Załóżmy, że nowa pojedyncza cząsteczka C tworzy się z pojedynczych cząsteczek składników A i B ($A + B \to C$). Prędkość tempa pojawiania sie cząsteczek produktu C jest wprost proporcjonalna do iloczynu składników A i B. Napisz funkcję $C(t)$ jako funkcję t. Załóż, że początkowe stężenie skałdników A to a $\frac{mol}{dm^3}$, składnika B - b $\frac{mol}{dm^3}$ i na początku nie ma żadnych czasteczek produktu C. Rozwiąż tak otrzymane zagadnienie. Jeśli $a = b$, to jak wygląda rozwiązanie? Ile związku C powstało po 20 sekundach?

Zadanie 34. Nietypową reakcja jest reakcja: $H_2 + Br_2 \to 2HBr$. Równanie które opisuje prędkość pojawiania sie HBr dane jest wzorem

$$\frac{d[HBr]}{dt} = k[H]([Br])^{\frac{1}{2}}.$$

Napisz równanie dla $x(t) = [HBr]$. Załóż, że początkowe stężenie skałdników A to a $\frac{mol}{dm^3}$, składnika B - b $\frac{mol}{dm^3}$ i na początku nie ma żadnych czasteczek HBr.

a) dla $a = b$ znajdź rozwiązanie równania.

b) znajdź rozwiązanie dla $a > b$ (podpowiedź $u = \sqrt{b - x}$).

Andrzej Raczyński