Iteracja Picarda

Zadanie 35. Oblicz pierwsze dwie iteracje Picarda dla zagadnienia $y' = t^2 + y^2$, $y(0) = 1$.
Zadanie 36. Oblicz pierwsze trzy iteracje Picarda dla zagadnienia $y' = e^t + y^2$, $y(0) = 0$.
Zadanie 37. Wyprowadź wzór na n-tą iterację Picarda $y_n(x)$ i oblicz jej granicę gdy $n \to \infty$ dla podanych zagadnień Cauchy'ego:
a) $y' = -y, \quad y(0) = 1$ b) $y' = x + y, \quad y(0) = 1$
c) $y' = 2xy, \quad y(0) = 1$ d) $y' + y^2 = 0, \quad y(0) = 0$
Zadanie 38. Oblicz kolejne iteracje Picarda dla zagadnienia Cauchy'ego $y' = 2t(y + 1)$, $y(0) = 0$ i udowodnij, że zbiegają one do rozwiązania $y(t) = e^{t^2} - 1$.

Zastosowania Twierdzenia Picarda-Lindelöfa

Zadanie 39. Udowodnij, że $y(t) = -1$ jest jedynym rozwiązaniem zagadnienia
$y' = t(1 + y)$, $y(0) = -1$. (Wsk. zastosuj Lemat Gronwalla.)
Zadanie 40. Dla podanich niżej zagadnień Cauchy'ego udowodnij, że rozwiązanie $y = y(t)$ istnieje na zadanym przedziale. Powtarzając rozumowanie podane na wykladzie udowodnij, że jest to jedyne rozwiązanie.
a) $y' = y^2 + \cos t^2; \quad y(0) = 0; \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/2$
b) $y' = 1 + y + y^2 \cos t; \quad y(0) = 0; \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/3$
c) $y' = t + y^2; \quad y(0) = 0; \quad 0 \leqslant t \leqslant (1/2)^{2/3}$
d) $y' = e^{-t^2} + y^2; \quad y(0) = 0; \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/2$
e) $y' = e^{-t^2} + y^2; \quad y(1) = 0; \quad 1 \leqslant t \leqslant 1 + \sqrt{e}/2$
Zadanie 41. Czy korzystając z Twierdzenia Picarda-Lindelöfa da się wyliczyć wartość rozwiązania zagadnienia $y'(t) = y$, $y(0) = 0$ na całej prostej?

Twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań

Zadanie 42. Rozważamy zagadnienie początkowe $y' = t^2 + y^2, \quad y(0) = 0$. Niech R będzie prostokątem $0 \leqslant t \leqslant a$, $-b \leqslant y \leqslant b$. Udowodnij poniższe stwierdzenia.
a) Rozwiązanie tego zagadnienia $y(t)$ istnieje dla $0 \leqslant t \leqslant \min\{a, b/(a^2 + b^2)\}$.
b) Przy ustalonym a, maksymalną wartością wyrażenia $b/(a^2 + b^2)$ jest $1/(2a)$.
c) Maksymalna wartość wyrażenia $\min\{a, 1/(2a)\}$ jest przyjmowana dla $a = 1/\sqrt{2}$.
d) Rozwiązanie $y(t)$ istnieje na przedziale $0 \leqslant t \leqslant 1/\sqrt{2}$.
Zadanie 43. Wskaż przedział (możliwie największy), na którym istnieje rozwiązanie zagadnienia:
a) $y' = 2y^2 - t$, $y(1) = 1$; b) $y' = t + e^y$, $y(1) = 0$.
Zadanie 44. Uzasadnij, że zagadnienie $y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0$ nie ma rozwiązania określonego na całej prostej.
Zadanie 45. Czy wykresy dwóch różnych rozwiązań danego równania mogą się przecinać w pewnym punkcie (t_0, y_0) jeżeli równaniem tym jest:
a) $y' = y^2 + t$, b) $y' = y^{1/2}$?
Wyznacz możliwie wszystkie takie punkty (t_0, y_0).
Zadanie 46. Znajdź rozwiązanie zagadnienia $y' = t\sqrt{1 - y^2}$, $y(0) = 1$, różne od rozwiązania $y(t) \equiv 1$. Które z założeń Tw. Picarda-Lindelöfa nie jest spełnione?
Zadanie 47. Wyznaczyć nieskończenie wiele rozwiązań równania $y' = 2y^{1/2}$ z warunkiem początkowym $y(0) = 0$. Które z założeń Tw. Picarda-Lindelöfa nie jest spełnione?

Zadanie 48. Inny dowód uproszczonej wersji Lematu Gronwalla. Niech $w(t)$ będzie nieujemną ciągłą funkcją spełniającą

$$w(t) \leqslant L \int_{t_0}^{t} w(s)\, ds$$

na odcinku $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \alpha$. Ponieważ w jest ciągła, istnieje taka stała A, że $0 \leqslant w(t) \leqslant A$ dla wszystkich $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \alpha$.
a) Udowodnij, że $w(t) \leqslant LA(t - t_0)$.
b) Użyj tego oszacowania do dowodu, że $w(t) \leqslant AL^2(t - t_0)^2/2$.
c) Pokaż indukcyjnie, że $w(t) \leqslant AL^n(t - t_0)^n/n!$.
d) Udowodnij, że $w(t) = 0$ dla $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \alpha$.

Metody iteracyjne

Zadanie 49. Wzorując się na dowodzie Twierdzenia Picarda-Lindelöfa, udowodnić następujące twierdzenie: *Załóżmy, że $f(x)$ i $f'(x)$ są ciągłe na odcinku $a \leqslant x \leqslant b$ oraz $|f'(x)| \leqslant \lambda < 1$ na tym odcinku. Załóżmy dodatkowo, że ciąg zdefiniowany rekurencyjnie $x_{n+1} = f(x_n)$ spełnia: $x_n \in [a, b]$ dla wszystkich $n = 0, 1, 2, 3, ...$ Przy tych założeniach ciąg x_n zbiega, gdy $n \to \infty$, do jedynego rozwiązania równania: $x = f(x)$.*

Wskazówka. Przeprowadzić dowód według następującego schematu:

1. Opierając się na Twierdzeniu o Wartości Średniej, udowodnić, że

$$|x_n - x_{n-1}| = |f'(\xi)(x_{n-1} - x_{n-2})| \leqslant \lambda|x_{n-1} - x_{n-2}|$$

   dla pewnej stałej $\xi \in [a, b]$.
2. Indukcyjnie pokazać, że $|x_n - x_{n-1}| \leqslant \lambda^{n-1}|x_1 - x_0|$.
3. Udowodnić zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - x_{n-1})$.
4. Zapisując x_n w postaci sumy teleskopowej udowodnić, że $\lim_{n\to\infty} x_n = y$ dla pewnego $y \in [a, b]$.
5. Jednoznaczność rozwiązania wywnioskować z równości:

$$y_1 - y_2 = f(y_1) - f(y_2) = f'(\xi)(y_1 - y_2)$$

   dla pewnego ξ leżącego pomiedzy y_1 i y_2.

Zadanie 50. Udowodnij, że ciąg iteracji x_0, $x_{n+1} = 1+(1/2)\operatorname{arc\,tg} x_n$ zbiega do jedynego rozwiązania równania $x = 1 + (1/2)\operatorname{arc\,tg} x$.
Zadanie 51. Udowodnij, że równanie $x = \sin x + 1/4$ ma jedyne rozwiązanie na odcinku $[\pi/4, \pi/2]$. Udowodnij, że ciąg iteracji $x_0 \in [\pi/4, \pi/2]$, $x_{n+1} = \sin x_n + 1/4$ zbiega do tego rozwiązania.
Zadanie 52. Załóżmy, że y jest rozwiązaniem równania $x = \sin x + 1/4$.
a) Niech $x_0 = \pi/4$. Udowodnij, że potrzeba 20 iteracji aby wyznaczyć y z dokładnością 8 miejsc po przecinku.
b) Niech $x_0 = 3\pi/8$. Udowodnij, że potrzeba 16 iteracji aby wyznaczyć y z dokładnością 8 miejsc po przecinku.

Andrzej Raczyński