Równania liniowe jednorodne drugiego rzędu

Dwa rozwiązania $y_1(t)$ i $y_2(t)$ równania liniowego drugiego rzędu, spełniające $W[y_1(t), y_2(t)] \neq 0$, będziemy nazywali *fundamentalnym zbiorem rozwiązań równania.*

Zadanie 53. Udowodnij, że funkcje $y_1(t) = \sqrt{t}$ i $y_2(t) = 1/t$ tworzą fundamentalny zbiór rozwiązań równania $2t^2y'' + 3ty' - y = 0$. Znajdź rozwiązanie tego równania spełniające warunki początkowe: $y(1) = 2, y'(1) = 1$.

Zadanie 54. Udowodnij, że funkcje $y_1(t) = e^{-t^2/2}$ i $y_2(t) = e^{-t^2/2} \int_0^t e^{s^2/2} ds$ tworzą fundamentalny zbiór rozwiązań równania $y'' + ty' + y = 0$. Znajdź rozwiązanie tego równania spełniające warunki początkowe: $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Zadanie 55. Niech $y_1(t)$ i $y_2(t)$ będą rozwiązaniami równania $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, gdzie $p(t)$ i $q(t)$ są ciągłe w pewnym przedziale $[\alpha, \beta]$. Oznaczmy

$$W(t) = W[y_1(t), y_2(t)] = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t).$$

a. Poprzez bezpośredni rachunek sprawdź, że $W' + p(t)W = 0$.
b. Na podstawie poprzedniego punktu wywnioskuj, że dla każdych $t, t_0 \in [\alpha, \beta]$ jest prawdziwa równość $W[y_1(t), y_2(t)] = W[y_1(t_0), y_2(t_0)] \exp\left(-\int_{t_0}^t p(s)\, ds.\right)$
c. Udowodnij, że wyznacznik Wrońskiego $W[y_1(t), y_2(t)]$ jest albo tożsamościowo równy 0 lub nigdy nie zeruje się na przedziale $[\alpha, \beta]$.

Zadanie 56. Udowodnij, że $y(t) = t^2$ nigdy nie może być rozwiązaniem równania $y''+p(t)y'+q(t)y = 0$ dla ciągłych $p(t)$ i $q(t)$.

Zadanie 57. Załóżmy, że wyznacznik Wrońskiego rozwiązań równania $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ jest stały (niezależny od t) i różny od 0. Udowodnij, że $p(t) \equiv 0$.

Zadanie 58. Znajdź rozwiązania następujących zagadnień:
a) $y'' + 3y' - 10y = 0, \quad y(1) = 5, \quad y'(1) = 2;$
b) $y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2;$
c) $2y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1;$
d) $9y'' + 6y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0;$

Zadanie 59. Równanie postaci $t^2y'' + \alpha ty' + \beta y = 0, \quad \alpha, \beta -$ stałe, nazywa się *równaniem Eulera.* Udowodnij, że funkcja $y(t) = t^r$ jest rozwiązaniem tego równania o ile $r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0$.

Zadanie 60. Znajdź rozwiązanie ogólne równania $t^2y'' + 5ty' - 5y = 0$.

Zadanie 61. Znajdź rozwiązanie zagadnienia $t^2y'' - ty' - 2y = 0, \quad y(1) = 0, y'(1) = 1$ na przedziale $0 < t < \infty$.

Zadanie 62. Sprawdź, że $W[e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t] = \beta e^{2\alpha t}$.

Zadanie 63. Załóżmy, że $a > 0$, $b > 0$ i $c > 0$. Udowodnij, że każde rozwiązanie równania $ay'' + by' + cy = 0$ dąży do 0 gdy $t \to \infty$.

Równania liniowej drugiego rzędu niejednorodne

Zadanie 64. Załóżmy, że równanie $y''+p(t)y'+q(t)y = g(t)$ ma trzy rozwiązania: $t^2, \quad t^2+e^{2t}, \quad 1+t^2+2e^{2t}$. Znajdź rozwiązanie ogólne. Znajdź to równanie.

Zadanie 65. Załóżmy, że równanie $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$ ma trzy rozwiązania: $3e^t + e^{t^2}, \quad 7e^t + e^{t^2}, \quad 5e^t + e^{-t^3} + e^{t^2}$. Znajdź rozwiązanie tego równania spełniające warunki początkowe $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Zadanie 66. Stosując metodę uzmieniania stałych znajdź rozwiązanie następujących równań:
$y'' - 4y' + 4y = te^{2t}$, $\quad 2y'' - 3y' + y = (t^2 + 1)e^t$, $\quad 3y'' + 4y' + y = (\sin t)e^{-t}$.
Zadanie 67. Stosując metodę uzmieniania stałych znajdź rozwiązanie zagadnienia
$y'' - y = f(t), \qquad y(0) = y'(0) = 0$.
Zadanie 68. Znajdź jedno szczególne rozwiązanie równań:
a) $y'' + 3y = t^3 - 1$, $\qquad$ b) $y'' + 4y' + 4y = te^{\alpha t}$, $\qquad$ c) $y'' - y = t^2 e^t$,
d) $y'' + y' + y = 1 + t + t^2$ $\qquad$ e) $y'' + 4y = t \sin 2t$,
f) $y'' - 2y' + 5y = 2(\cos^2 t)e^t$, $\qquad$ g) $y'' + y = \cos t \cos 2t$.
Zadanie 69. Znajdź rozwiązanie szczególne równania $(1 - t^2)y'' - ty' + 9y = 0$, jeżeli wiadomo, że ma ono rozwiązanie szczególne będące wielomianem stopnia 3. *Uwaga:* równanie Czebyszewa $(1 - t^2)y'' - ty' + n^2 y = 0$ zawsze ma rozwiązanie szczególne będące wielomianem stopnia n.
Zadanie 70. Dla jakich wartości k i ω równanie $x'' + k^2 x = \sin \omega t$ ma przynajmniej jedno rozwiązanie okresowe?
Zadanie 71. Dla jakich wartości a zagadnienie $y'' + ay = 1$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$, nie ma rozwiązań?
Zadanie 72. Szukamy rozwiązania szczególnego równania $y'' - 2y' + y = te^t$.
Sprawdź przez bezpośrednie podstawienie, że próba szukania rozwiązania szczególnego w postaci $\psi_1(t) = (a_0 + a_1 t)e^t$ lub $\psi_2(t) = (a_0 + a_1 t + a_2 t^2)e^t$ prowadzi do sprzeczności.
Wyjaśnij, dlaczego szukając rozwiązania w postaci $\psi_3(t) = (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3)e^t$ można przyjąć, że $a_0 = a_1 = 0$.

Andrzej Raczyński