Zastosowania równań liniowych rzędu drugiego

Zadanie 73. Sprawdzono eksperymentalnie, że ciężarek o masie 1 kg zawieszony na pewnej sprężynie rozciąga ją o 49/320 metra. Ciągniemy ten ciężarek w dół o dodatkowe 1/4 metra i puszczamy. Oblicz amplitudę, okres i częstotliwość powstałych drgań. Przyjmij g=9.8 m/s^2.

Zadanie 74. Niech $y(t) = Ar^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ gdzie $|A| + |B| \neq 0$.

a) Udowodnij, że $y(t)$ zeruje się najwyżej raz.

b) Udowodnij, że $y'(t)$ zeruje się najwyżej raz.

Zadanie 75. Niech $y(t) = (A + Bt)e^{rt}$ gdzie $|A| + |B| \neq 0$.

a) Udowodnij, że $y(t)$ zeruje się najwyżej raz.

b) Udowodnij, że $y'(t)$ zeruje się najwyżej raz.

Zadanie 76. Mały ciężarek o masie 1 kg jest zawieszno na sprężynie o stałej sprężystości równej 2 N/m. Cały układ jest zanurzony w lepkiej cieczy o współczynniku tłumienia 3 Ns/m. W chwili $t = 0$ ciężarek wychylono o 1/2 m od położenia równowagi. Udowodnij, że po zwolnieniu ciężarka powróci on bezpośrednio do stanu równowagi gdy $t \to \infty$.

Zadanie 77. Mały ciężarek o masie 1 kg jest zawieszno na sprężynie o stałej sprężystości równej 1 N/m. Cały układ jest zanurzony w lepkiej cieczy o współczynniku tłumienia 2 Ns/m. W chwili $t = 0$ ciężarek wychylono o 1/4 m od położenia równowagi. Udowodnij, że po nadaniu ciężarkowi w chwili początkowej prędkości 1 m/s, minie on położenie równowagi, a następnie powoli powróci do stanu równowagi gdy $t \to \infty$.

Zadanie 78. Na ciężarek o masie 4 kg, zawieszony na sprężynie o stałej strężystości 64 N/m, działa okresowo siła $F(t) = A\cos^3 \omega t$. Znajdź wszystkie wartości ω, dla których zachodzi rezonans. Tłumienie drgań pomijamy.

Zadanie 79. Działo w czołgu jest przymocowane do układu pochłaniającego drgania o stałej sprężystości $100\alpha^2$ i stałej tłumienia 200α (w odpowiednich jednostkach). Masa działa wynosi 100 kg. Załóżmy, że funkcja $y(t)$ opisująca wychylenie działa ze stanu spoczynku po oddaniu strzału w chwili $t = 0$, spełnia zagadnienie początkowe

$$100y'' + 200\alpha y' + 100\alpha^2 y = 0; \quad y(0) = 0, \;\; y'(0) = 100 \text{ m/s}.$$

Wymaga się, aby po oddaniu strzału wielkość $y^2 + (y')^2$ była mniejsza niż 0,01. Jak duże musi być α żeby to zagwarantować pół sekundy po oddaniu strzału?

Zadanie 80. Znajdź rozwiązanie szczególne $\phi(t)$ równania $my'' + cy' + ky = F_0 \cos \omega_0 t$ w postaci $\psi(t) = A\cos(\omega t - \phi)$. Udowodnij, że aplituda drgań A jest największa gdy $\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{2}(c/m)^2$. Taka wartość ω nazywa się *częstotliwością rezonansową* układu. Co dzieje się w tym układzie gdy $\omega_0^2 < \frac{1}{2}(c/m)^2$.

Równania liniowe wyższych rzędów

Zadanie 81. Znajdź rozwiązania następujących zagadnień:

a) $y^{(iv)} - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = y''(0) = 0, \quad y'''(0) = -1;$

b) $y^{(v)} - 2y^{(iv)} + y''' = 0, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0, \quad y^{(iv)}(0) = -1;$

c) $y^{(iv)} + y'' = t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 2, y''(0) = 1, y'''(0) = 0, \quad y^{(iv)}(0) = 1;$

d) $y''' - 2y'' + y' = e^t, \quad y(0) = 2, y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0, \quad y^{(iv)}(0) = 1.$

Rozwiązania w postaci szeregów potęgowych

Zadanie 82. Znajdź rozwiązanie ogólne równań: $y'' + ty' + y = 0, \quad y'' - ty = 0, \quad y'' - t^3 y = 0.$ Zbadaj promień zbieżności otrzymanych szeregów potęgowych.

Zadanie 83. Znajdź rozwiązanie następujących zagadnień:
a) $y'' + t^2 y = 0, \quad y(0) = 2, \; y'(0) = -1$
b) $t(2-t)y'' - 6(t-1)y' - 4y = 0, \quad y(1) = 1, \; y'(1) = 0$
Zadanie 84. Równanie postaci $y'' - 2ty' + \lambda y = 0$, gdzie λ jest pewną stałą nazywa się równaniem Hermite'a. (a) Znajdź dwa niezależne rozwiązania równania Hermite'a. (b) Udowodnij, że dla $\lambda = 2n$ (n – liczba naturalna) równanie Hermite'a ma rozwiązanie w postaci wielomianu stopnia n
Zadanie 85. W poniższych zagadnieniach znajdź rekurencyjne wzory na współczynniki w rozwinieciu rozwiązania w szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ (PS. W przypadku problemów wyznacz tylko pięć pierwszych współczynników szeregu.)
a) $(1-t)y'' + ty' + y = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0;$
b) $y'' + ty' + e^t y = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0;$
c) $y'' + y' + e^{-t} y = 0, \quad y(0) = 3, \; y'(0) = 5;$

Transformata Laplace'a

Zadanie 86. Stosując wzór $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2$ oblicz $\mathcal{L}\{t^{-1/2}\}$.
Zadanie 87. Uzasadnij, że każda z podanych funkcji ma wzrost podwykładniczy:
t^n (dla każdego $n > 0$); $\sin at$; $e^{\sqrt{t}}$.
Zadanie 88. Uzasadnij, że nie istnieje transformata Laplace'a funkcji e^{t^2}.
Zadanie 89. Załóżmy, że $f(t)$ ma wzrost podwykładniczy. Udowodnij, że $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ dąży do 0 gdy $s \to \infty$.
Zadanie 90. Niech $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Udowodnij indukcyjnie, że
$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \ldots - \frac{(d^{n-1} f)(0)}{dt^{n-1}}.$$
Zadanie 91. Stosując transformatę Laplace'a znajdź rozwiązania następujących zagadnień:
a) $y'' - 5y' + 4y = e^{2t}, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = -1;$
b) $y'' - 3y' + 2y = e^{-t}, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0;$
c) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = e^{4t}, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 0, \; y''(0) = 0;$
Zadanie 92. Oblicz transformaty Laplace'a funkcji: t^n, $t^n e^{at}$, $t \sin at$, $t^2 \cos at$.
Zadanie 93. Załóżmy, że $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ oraz granica $\lim_{t \searrow 0} f(t)/t$ istnieje. Udowodnij, że $\mathcal{L}\{f(t)/t\} = \int_s^\infty F(u)\,du$.
Oblicz transformaty Laplace'a funkcji: $\frac{\sin t}{t}$, $\frac{\cos at - 1}{t}$, $\frac{e^{at} - e^{bt}}{t}$.
Zadanie 94. Stosując transformatę Laplace'a znajdź rozwiązania następujących zagadnień:
a) $y'' + y = \sin t, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 2;$
b) $y'' + y = t \sin t, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 2;$
c) $y'' + y' + y = 1 + e^{-t}, \quad y(0) = 3, \; y'(0) = -5;$

Andrzej Raczyński