Układy równań liniowych pierwszego rzędu

Zadanie 95. Znajdź rozwiązania następujących układów sprowadzając je do równań drugiego rzędu:
a) $x' = x + y, \quad y' = 4x + y, \qquad x(0) = 2, \quad y(0) = 3;$
b) $x' = 3x - 2y, \quad y' = 4x - y, \qquad x(0) = 1, \quad y(0) = 5;$
c) $x' = y + f_1(t), \quad y' = -x + f_2(t), \qquad x(0) = 0, \quad y(0) = 0$; ($f_1$ i f_2 to dane funkcje).
Zadanie 96. Zapisz w postaci układu równań pierwszego rzędu następujące równania:
$y''' + (y')^2 = 0, \quad y''' + \cos y = e^t, \quad y^{(iv)} + y'' = 1.$
Zadanie 97. Zapisz w postaci wektorowej $\bar{x}' = A\bar{x}$, $\bar{x}(t_0) = \bar{x}^0$ następujące układy
a) $x_1' = 3x_1 - 7x_2, \quad x_2' = 4x_1, \qquad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1;$
b) $x_1' = x_1 + x_2 - x_3, \quad x_2' = x_1, \quad x_3' = -x_2, \qquad x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 3 \quad x_3(0) = 4;$
Zadanie 98. Znajdź bazę rozwiązań następujących układów równań liniowych sprowadzając je do jednego równania wyższego rzędu

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \bar{x}, \quad \bar{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \bar{x}, \quad \bar{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \bar{x}, \quad \bar{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \bar{x}.$$

Zadanie 99. Obliczając wartości własne i wektory własne macierzy układu, skonstruuj rozwiązanie ogólne:

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \bar{x}, \quad \bar{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \bar{x}, \quad \bar{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \bar{x}, \quad \bar{x}' = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix} \bar{x}.$$

Zadanie 100. Obliczając wartości własne i wektory własne macierzy układu, rozwiąż następujące zagadnienia początkowe

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \bar{x}, \quad \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \qquad \bar{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \bar{x}, \quad \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Zespolone wartości własne

Zadanie 101. Obliczając wartości własne i wektory własne macierzy układu, skonstruuj rozwiązanie ogólne:

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \bar{x}, \quad \bar{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{x}, \quad \bar{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \bar{x}.$$

Zadanie 102. Obliczając wartości własne i wektory własne macierzy układu, rozwiąż następujące zagadnienia początkowe

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \bar{x}, \quad \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}; \qquad \bar{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \bar{x}, \quad \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 103. Wyznacz wszystkie wektory $\bar{x}^0$ takie, że rozwiązanie zagadnienia

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \bar{x}, \quad \bar{x}(0) = \bar{x}^0 \qquad \text{jest okresową funkcją } t.$$

Wielokrotne pierwiastki równania charakterystycznego

Zadanie 104. Znajdź rozwiązania następujących zagadnień

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \bar{x}, \quad \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \bar{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \bar{x}, \quad \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 105. Niech $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$. Udwodnij, że $e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix}$.

Zadanie 106. Niech $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Udwodnij, że $e^{At} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Zadanie 107. Oblicz e^{At} dla macierzy A równej $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Zadanie 108. Niech $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Uzasadnij, że $A^2 = -I$ i wykorzystując ten fakt udowodnij, że $e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

Macierz fundamentalna

Zadanie 109. Oblicz e^{At} dla macierzy A równej $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Zadanie 110. Znajdź macierz A, dla której $e^{At} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} - e^t & e^{2t} - e^t & e^t - e^{2t} \\ e^{2t} - e^t & 2e^{2t} - e^t & e^t - e^{2t} \\ 3e^{2t} - 3e^t & 3e^{2t} - 3e^t & 3e^t - 2e^{2t} \end{pmatrix}$.

Równania niejednorodne

Zadanie 111. Znadź rozwiązania następujących zagadnień:

a) $\bar{x}' = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 4e^t \cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$

b) $\bar{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t, \qquad \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$

c) $\bar{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}, \qquad \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$

Wstęp do układów dynamicznych

Zadanie 112. Znajdź wszystkie punkty stacjonarne następujących układów dynamicznych:
a) $x' = x - x^3 - xy^2, \quad y' = 2y - y^5 - yx^4,$
b) $x' = x^2 + y^2 - 1, \quad y' = x^2 - y^2,$
c) $x' = e^y - x, \quad y' = e^x + y,$
d) $x' = xy^2 - x, \quad y' = x \sin \pi y.$

Zadanie 113. Zbadaj stabilność (lub niestabilość) układów

a) $\bar{x}' = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \bar{x}$ b) $\bar{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \bar{x}$ c) $\bar{x}' = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \bar{x}$

Zadanie 114. Udowodnij, że rozwiązania układu

$$x' = y(e^x - 1), \quad y' = x + e^y$$

z warunkiem początkowym w I ćwiartce układu współrzędnych pozostają w tym obszarze. Co można powiedzieć o rozwiązaniach, jeśli warunek początkowy jest w innych obszarach?

Zadanie 115. Udowodnij, że rozwiązania układu

$$x' = -x - xy + x^3, \quad y' = x^2 + yx^2$$

jeśli mają punkt początkowy wewnątrz okręgu jednostkowego, to pozostają w nim dla wszystkich czasów. A co się dzieje, jeśli punkt początkowy jest na zewnątrz okręgu? (Wskazówka: oblicz $\frac{d}{dt}(x^2 + y^2)$.)

Zadanie 116. Naszkicuj portrety fazowe następujących układów:

a) $\bar{x}' = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \bar{x}$ b) $\bar{x}' = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} \bar{x}$

c) $\bar{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \bar{x}$ d) $\bar{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \bar{x}$

Zadanie 117. Naszkicuj portret fazowy układu:

$$x' = y, \quad y' = x + 2x^3$$

Andrzej Raczyński