Wprowadzenie do równań różniczkowych cząstkowych

Zadanie 118. Sprawdź, że $u(x,y) = f(x)g(y)$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego cząstkowego $uu_{xy} = u_x u_y$ dla dowolnych różniczkowalnych funkcji f, g jednej zmiennej.

Zadanie 119. Sprawdź, że $u_n(x,y) = \sin nx \sinh ny$ jest rozwiązaniem równania $u_{xx} + u_{yy} = 0$ dla każdego $n > 0$.

Zadanie 120. Znajdź rozwiązania ogólne $u = u(x,y)$ następujących równań:
$u_x = 1, \qquad u_y = 2xy, \qquad u_{yy} = 6y, \qquad u_{xy} = 1, \qquad u_x + y = 0, \qquad u_{xxyy} = 0.$

Zadanie 121. Znajdź funkcję $u = u(x,y)$ spełniającą podane równanie różniczkowe cząstkowe i warunki dodatkowe:
a) $u_{xx} = 6x; \qquad u(0,y) = y, \quad u(1,y) = y^2 + 1$
b) $yu_{yy} + u_y = 0, \qquad u(x,1) = x^2, \quad u(x,e) = 1.$

Zadanie 122. Znaleźć rozwiąznie ogólne równania $3u_y + u_{xy} = 0$ (Wsk. Podstawić $v = u_y$.). Czy istnieje jedyne rozwiązanie przy dodatkowych warunkach $u(x,0) = e^{-3x}, \quad u_y(x,0) = 0.$

Równania pierwszego rzędu

Zadanie 123. Rozwiązać równanie $2u_t + 3u_x = 0$ przy dodatkowym warunku $u = \sin x$ dla $t = 0$.

Zadanie 124. Rozwiązać równanie $(1 + x^2)u_x + u_y = 0$. Naszkicować charakterystyki.

Zadanie 125. Rozwiązać równanie $\sqrt{1 - x^2}u_x + u_y = 0$ przy warunku $u(0,y) = y$.

Zadanie 126. Znaleźć rozwiązanie ogólne $= u(x,y)$ równania $xu_x + yu_y = 0$.

Równanie falowe na prostej

Zadanie 127. Rozwiąż zagadnienie: $u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad u(x,0) = e^x, \quad u_t(x,0) = \sin x.$

Zadanie 128. Rozwiąż zagadnienie: $u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad u(x,0) = \log(1 + x^2), \quad u_t(x,0) = 4 + x.$

Zadanie 129. Młoteczek o średnicy $2a$ uderzył w środek struny fortepianowej o napięciu T, gęstości ρ i długości ℓ. Pchła siedzi na tej strunie w odległości $\ell/4$ od jednego z końców. (Zakładamy, że $a < \ell/4$; w przeciwnym wypadku – biedna pchła!). Ile czasu minie od momentu uderzenia, do momentu gdy pchła odczuje pierwsze drgania? (Wsk.: równanie drgającej struny: $\rho u_{tt} = T u_{xx}$.)

Zadanie 130. Załóżmy, że φ i ψ są funkcjami nieparzystymi względem x. Udowodnij, że rozwiązanie równania falowego $u(x,t)$ z tymi warunkami początkowymi jest też funkcją nieparzystą względem x dla każdego t.

Zadanie 131. Rozwiąż zagadnienie

$$u_{xx} - 3u_{xt} - 4u_{tt} = 0, \quad u(x,0) = x^2, \quad u_t(x,0) = e^x.$$

(Wsk. Zapisz operator po lewej stronie równania w postaci (...)(...), podobnie jak to było zrobione na wykładzie).

Zadanie 132. Rozwiąż zagadnienie

$$u_{xx} + u_{xt} - 20u_{tt} = 0, \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x).$$

Funkcje własne i wartości własne

Zadanie 133. Rozważmy równanie różniczkowe zwyczajne z warunkami brzegowymi:
$\frac{d^2u}{dx^2} + u = 0, \qquad u(0) = 0, \quad u(L) = 0.$
Oczywiście funkcja $u(x) \equiv 0$ jest rozwiązaniem tego zagadnienia. Czy jest to jedyne rozwiązanie? Czy odpowiedź zależy od L?

Zadanie 134. Dla jakich wartości λ zagadnienie $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi)$ ma nietrywialne rozwiązanie?

Zadanie 135. Rozwiąż zagadnienie brzegowe
$u'' = 0$ dla $0 < x < 1$, $u'(0) + ku(0) = 0$, $u'(1) \pm ku(1) = 0$
dla każdej stałej k. Rozważaj przypadki $+$ i $-$ osobno. Dlaczego przypadek z $k = 2$ jest wyróżniony?
Zadanie 136. Wyznacz graficznie wartości własne zagadnienia
$-X'' = \lambda X$, $X(0) = 0$, $X'(1) + aX(1) = 0$
dla pewnej stałej $a \neq 0$.
Zadanie 137. Znajdź wartości własne i odpowiadające im funkcje własne zagadnienia
$\frac{d^4 X}{dx^4} = \lambda X$, $X(0) = X(1) = X''(0) = X''(1) = 0$.
Zadanie 138. Znajdź wartości własne i odpowiadające im funkcje własne zagadnienia
$\frac{d^4 X}{dx^4} = \lambda X$, $X(0) = X'(0) = X(1) = X'(1) = 0$.

Szeregi Fouriera

Zadanie 139. Znaleźć szereg Fouriera funkcji
$f(x) = x$ na $(-\pi, \pi)$ $f(x) = |x|$ na $(-\pi, \pi)$ $f(x) = |x|$ na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$
$f(x) = x^2$ na $(0, 2\pi)$ $f(x) = e^x$ na $(0, 2\pi)$ $f(x) = e^x$ na $(-\pi, \pi)$

Metoda Fouriera rozdzielania zmiennych

Zadanie 140. Skonstruuj rozwiązanie następujących zagadnień metodą rozdzielania zmiennych: a) $u_t = u_y$, $u(0, y) = e^y + e^{-2y}$; b) $u_t = u_y + u$, $u(0, y) = 2e^{-y} - e^{2y}$.
Zadanie 141. Rozdzielając zmienne rozwiąż równanie $tu_t = u_{xx} + 2u$ z warunkami brzegowymi $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$. Udowodnij, że równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań spełniających warunek początkowy $u(x, 0) = 0$. Tak więc, w tym przypadku brak jest jednoznaczności rozwiązań!
Zadanie 142. Rozwiąż równanie dyfuzji $u_t = u_{xx}$, $0 < x < 1$, z mieszanym warunkiem brzegowym: $u(0, t) = u_x(1, t) = 0$ i warunkiem początkowym $\varphi(x)$.
Zadanie 143. Rozważamy równanie falowe $u_{tt} = u_{xx}$, $0 < x < 1$, z mieszanym warunkiem brzegowym: $u_x(0, t) = u(1, t) = 0$. Znajdź funkcje własne i wartości własne, oraz zapisz rozwiązanie w postaci szeregu.
Zadanie 144. Rozważamy równanie dyfuzji $u_t = u_{xx}$, $-1 < x < 1$, z okresowymi warunkami brzegowymi: $u(-1, t) = u(1, t)$ oraz $u_x(-1, t) = u_x(1, t)$. Udowodnij, że rozwiązanie ma następującą postać $u(x, t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x\Big) e^{-n^2\pi^2 t}$.
Zadanie 145. Znajdź rozwiązanie równania $u_{xx} + u_{yy} = 0$ w prostokącie $0 < x < a$, $0 < y < b$ spełniające następujące warunki brzegowe:
$u_x = -a$ dla $x = 0$, $u_x = 0$ dla $x = a$,
$u_y = b$ dla $y = 0$, $u_y = 0$ dla $y = b$.
(Wsk. To zadanie można zrobić na dwa sposoby: metodą Fouriera rozdzielania zmiennych lub można szukać rozwiązania w postaci wielomianu.)
Zadanie 146. Znajdź rozwiązanie zagadnienia
$u_t = u_{xx} + u$, $x \in (0, 1)$; $u(x, 0) = \cos x$, $u(0, t) = u(1, t) = 0$.

Jednoznaczność rozwiązań

Zadanie 147. Udowodnij, że energia rozwiązania struny z *tłumieniem*
$u_{tt} - u_{xx} + ru_t = 0$, gdzie $r > 0$, maleje w czasie.
Zadanie 148. Udowodnij, metodą energetyczną, jednoznaczność rozwiązań dla równania dyfuzji z warunkami typu Neumanna:

$$\begin{aligned} &u_t - ku_{xx} = f(x, t) \quad \text{dla} \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0 \\ &u(x, 0) = \phi(x), \quad u_x(0, t) = g(t), \quad u_x(\ell, t) = h(t) \end{aligned}$$

(f, ϕ, g, h są danymi funkcjami).

Andrzej Raczyński