Lista Zadań Nr **0** **Równania różniczkowe 1R** *16 lutego 2018 r.*

B. WRÓBLEWSKI

Twierdzenie o kontrakcji

Zadanie 1. Przypomnij, że zbiór funkcji ciągłych $C([a,b])$ z „normą supremum"

$$\|u\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |u(x)|$$

jest w istocie przestrzenią liniową unormowaną. Udowodnij, że jest ona przestrzenią zupełną, to znaczy że każdy ciąg funkcji $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ spełniający warunek Cauchy'ego jest jednostajnie zbieżny.

Zadanie 2. *Zasada kontrakcji Banacha, wersja* $C[a,b]$
Niech M będzie domkniętym, niepustym podzbiorem $C[a,b]$ oraz niech odwzorowanie $T : M \to M$ będzie kontrakcją. Udowodnij, że równanie $f = T(f)$ ma dokładnie jedno rozwiązanie $f \in M$.

WSKAZÓWKA: Pokaż, że dla dowolnego $f_0 \in M$ ciąg $T^n(f_0)$ jest ciągiem Cauchy'ego.

Zadanie 3. Uzasadnij, że twierdzenie Banacha nie jest prawdziwe, gdy przyjmiemy $k = 1$ w definicji kontrakcji.

Zadanie 4. Ustal, dla jakich wartości parametru $\lambda \in \mathbb{R}$, odwzorowanie $T : C([a,b]) \to C([a,b])$ zadane wzorem

$$F(u)(x) = x + \lambda \int_a^b \sin(u(y))\,\mathrm{d}y$$

jest kontrakcją.

Zadanie 5. Zaproponuj warunki, dla których równanie

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x,y) f(y)\, dy,$$

gdzie $g \in C([a,b])$, ma jednoznaczne rozwiązanie $f^* \in C([a,b])$.

Zadanie 6. (*) Udowodnij ogólną wersję zasady kontrakcji.

Twierdzenie Arzeli-Ascoliego

Zadanie 7. *Twierdzenie Arzeli-Ascoliego, wersja* $C[a,b]$
Niech $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem funkcji z $C([a,b])$, takim że:

1. jest on ograniczony, tzn. istnieje $R > 0$ takie, ze dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $\|f_n\|_\infty \le R$,
2. jest on jednakowo jednostajnie ciągły, tzn. dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdych $x, y \in [a,b]$ i $n \in N$ zachodzi

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon\ .$$

Wówczas ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posiada podciąg jednostajnie zbieżny.

Zadanie 8. Uzasadnij, że warunek jednostajnej ograniczoności, warunek jednostajnej ciągłości oraz ograniczoność i domkniętość przedziału są istotne w sformułowaniu twierdzenia Arzeli-Ascoliego.

Zadanie 9. Uzasadnij, że ciąg $(f_n)_{n\in N}$ funkcji z $C([a,b])$ o podanych własnościach jest jednakowo jednostajnie ciągły.

- Istnieje $L > 0$ takie, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i każdego $x, y \in [a,b]$ zachodzi $|f_n(x) - f_n(y)| \leq L|x-y|$.
- Wszystkie f_n są różniczkowalne w sposób ciągły, oraz istnieje $D > 0$ takie, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $\|f_n(x)\|_\infty \leq D$.
- Istnieją $H > 0$ i $\alpha \in [0,1]$ takie, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i każdego $x, y \in [a,b]$ zachodzi $|f_n(x) - f_n(y)| \leq H|x-y|^\alpha$.

Zadanie 10. (*) Udowodnij ogólną wersję twierdzenia Arzeli-Ascoliego.

Definicja 1. Ciąg funkcji $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy ciągiem Cauchy'ego, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdych $n, m > N$ zachodzi $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$.

Definicja 2. Zbiór $M \subset C[a,b]$ nazywamy domkniętym, jeżeli dla każdego ciągu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ funkcji ze zbioru M jeżeli ciąg ten zbiega jednostajnie do funkcji f to $f \in M$.

Definicja 3. Odwzorowanie $T : M \to M$, gdzie $M \subset C([a,b])$, nazywamy kontrakcją, jeżeli istnieje $0 \leq k < 1$ takie, że dla każdych $f_1, f_2 \in M$ zachodzi

$$\|T(f_1) - T(f_2)\|_\infty \leq k\|f_1 - f_2\|_\infty \,.$$

Twierdzenie 4. *[Banach, 1920]*
Niech (X, d) będzie zupełną przestrzenią metryczną i niech odwzorowanie $T : X \to X$ będzie kontrakcją. Wówczas równanie $x = T(x)$ ma dokładnie jedno rozwiązanie $x^* \in X$.

Twierdzenie 5. *[Arzelà 1883, Ascoli 1895]*
Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną zwartą, a $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem funkcji z $C(X)$, spełniającym warunki

1. istnieje $R > 0$ takie, że dla każdego $n \in N$ zachodzi $\|f_n\|_\infty < R$ (*jednakowa ograniczoność*),
2. dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdych $x, y \in X$ i $n \in N$ zachodzi

   $$d(x,y) < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon \,.$$

   (*jednakowa jednostajna ciągłość*).

Wówczas ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posiada podciąg jednostajnie zbieżny.