B. WRÓBLEWSKI

Równania w postaci różniczek zupełnych

Zadanie 1. Rozwiąż równania (w różniczkach zupełnych):

a) $2ty \, \mathrm{d}t + (t^2 - y^2) \, \mathrm{d}y = 0$,

b) $e^{-y} \, \mathrm{d}t - (2y + te^{-y}) \, \mathrm{d}y = 0$,

c) $\left(t - y\cos\frac{y}{t}\right) \, \mathrm{d}t + t\cos\frac{y}{t} \, \mathrm{d}y = 0$,

d) $y' = \frac{x+2}{t+1} + \operatorname{tg}\frac{x-2t}{t+1}$.

Zadanie 2. W podanych równaniach dobierz stałą a lub funkcję $f(t)$ tak, aby było ono zupełne, a następnie rozwiąż je:

a) $t + ye^{2ty} + ate^{2ty}y' = 0$, b) $\frac{1}{t^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{(at+1)}{y^3}y' = 0$, c) $y^2 \sin t + yf(t)y' = 0$.

Zadanie 3. Znajdź współczynnik $f = f(t)$ w równaniu $fy' + t^2 + y = 0$ jeżeli wiadomo, że ma ono czynnik całkujący postaci $u(t) = t$.

Zadanie 4. Scałkuj równania metodą czynnika całkującego:

a) $\left(\frac{t}{y} + 1\right) \, \mathrm{d}t + \left(\frac{t}{y} - 1\right) \, \mathrm{d}y = 0$,

b) $(t^2 + y) \, \mathrm{d}t - t \, \mathrm{d}y = 0$,

c) $(y + t^2) \, \mathrm{d}y + (t - ty) \, \mathrm{d}t = 0$,

d) $ty^2 \, \mathrm{d}t - (t^2y - t) \, \mathrm{d}y = 0$.

Zadanie 5. Uzasadnij, że równanie $M(t) + N(y)y' = 0$ o zmiennych rozdzielonych jest zupełne. Uzasadnij, że równanie liniowe niejednorodne $y' + a(t)y = b(t)$ nie jest zupełne. Znajdź jego czynnik całkujący.

Zadanie 6. Równanie różniczkowe może mieć więcej niż jeden czynnik całkujący. Udowodnij, że $\mu_1(x, y) = \frac{1}{xy}$, $\mu_2(x, y) = \frac{1}{y^2}$, $\mu_3(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ są czynnikami całkującymi równania

$$y \, \mathrm{d}x - x \, \mathrm{d}y = 0.$$

Uzasadnij, że otrzymane przy pomocy tych czynników całkujących rozwiązania są równoważne.

Zadanie 7. Wykaż, że krzywe całkowe równania

$$\left[2t(t^2 - aty + y^2) - x^2\sqrt{t^2 + y^2}\right] \, \mathrm{d}t + y\left[2(t^2 - aty + y^2) + t\sqrt{t^2 + y^2}\right] \, \mathrm{d}y = 0,$$

gdzie $|a| < 2$, są krzywymi zamkniętymi.
WSKAZÓWKA: Wprowadź zmienne biegunowe.

Zadanie 8. Szybkość zmiany temperatury rozgrzanego czajnika jest proporcjonalna do różnicy między jego temperaturą a temperaturą powietrza (prawo Newtona). Niech $S(t)$ oznacza temperaturę czajnika w chwili t. Zakładamy, że $S(0) = 100^o C$ w temperaturze otoczenia $20^o C$. Po dziesięciu minutach temperatura czajnika wynosiła $60^o C$. Po ilu minutach czajnik będzie miał temperaturę $25^o C$?

Zadanie 9. Z naczynia w kształcie walca przez otwór w dnie wypływa woda z prędkością $v = a\sqrt{2gh}$ (prawo Torricellego), gdzie $h = h(t)$ jest wysokością słupa cieczy w chwili t. W momencie $t = 0$ naczynie było napełnione do wysokości h_0. Po jakim czasie naczynie się opróżni?

Zadanie 10. Spadek kamienia pod wpływem siły grawitacji, z uwzględnieniem oporu powietrza, jest opisany równaniem

$$x''(t) = -g + k(x'(t))^2, \ k > 0.$$

Pokaż, że po długim czasie porusza się on z prędkością graniczną, tzn. $\lim_{t\to\infty} x'(t) = -(g/k)^{1/2}$.

Zadanie 11. Modelujemy rozprzestrzenianie się plotki w populacji liczącej 1000 osób . Załóżmy, że 5 osób rozprzestrzenia plotkę i po jednym dniu wie o niej już 10 osób. Ile czasu potrzeba, aby o plotce dowiedziało się 850 osób, przy założeniu że:

- Plotka rozprzestrzenia się z prędkością proporcjonalną do iloczynu liczby osób, które już słyszały tę plotkę, oraz liczby osób, ktore jeszcze nie słyszały tej plotki.
- Plotka rozprzestrzenia się według prawa Gompertza: $y' = kye^{-(73/520)t}$.

Porównaj te dwa modele i otrzymane wyniki.

Zadanie 12. Ciało zamordowanego znaleziono o 19:30. Lekarz sądowy przybył o 20:20 i natychmiast zmierzył temperaturę ciała denata. Wynosiła ona $32,6^o$ C. Godzinę później, gdy usuwano ciało, temperatura wynosiła $31,4^o$C. W tym czasie temperatura w pomieszczeniu wynosiła 21^oC. Najbardziej podejrzana osoba, która mogła popełnić to morderstwo – Jan G., twierdzi jednak, że jest niewinny. Ma alibi. Po południu był on w restauracji. O 17:00 miał rozmowę zamiejscową, po której natychmiast opuścił restaurację. Restauracja znajduje się 5 minut na piechotę od miejsca morderstwa. Czy alibi to jest niepodważalne?

Zadanie 13. *(Ciąg dalszy zadania poprzedniego)*. Obrońca Jana G. zauważył, że zamordowany był u lekarza o 16:00 w dniu śmierci i wtedy jego temperatura wynosiła $38,3^o$C. Załóżmy, że taką temperaturę miał on w chwili śmierci. Czy można dalej podejrzewać, że Jan G. popełnił to morderstwo?

Zadanie 14. Rozwój populacji liczącej $M(t)$ osobników w chwili t można opisać równaniem Verhulsta

$$M'(t) = aM(t) - bM^2(t)$$

(dla populacji ludzkiej z dobrym przybliżeniem $a = 0,029$, $b = 2,941 \cdot 10^{-12}$). Udowodnij, że $\lim_{t\to\infty} M(t) = a/b$. Określ, dla jakiego t funkcja $M'(t)$ osiąga maksimum.

Zadanie 15. Dla danej rodziny krzywych znajdź trajektorie ortogonalne:

a) $y = Ct^2$,

b) $y = C \sin t$,

c) $y = Ce^t$,

d) $t^2 + y^2 = Ct$.