B. WRÓBLEWSKI

Istnienie i jednoznaczność rozwiązań

Zadanie 1. Zbadaj istnienie rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego $y' = f(y,t)$ i $y(0) = 0$, gdzie

$$f(y,t) = \begin{cases} -1 & t \le 0,\ y \in \mathbb{R} \\ 1 & t > 0,\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Zadanie 2. Wyprowadź wzór na n-tą iterację Picarda $y_n(x)$ i oblicz jej granicę gdy $n \to \infty$ dla podanych zagadnień Cauchy'ego:

a) $y' = -y \quad y(0) = 1$, b) $y' = 2yt \quad y(0) = 1$, c) $y' = -y^2 \quad y(0) = 0$.

Zadanie 3. Wyprowadź wzór na n-tą iterację Picarda dla zagadnienia początkowego $x' = x^2,\ x(0) = 1$ na odcinku $[0,2]$, jeżeli $x_0(t) \equiv 1$. Oblicz granicę tego ciągu. Znajdź rozwiązanie zagadnienia, i porównaj rezultaty.

Zadanie 4. Stosując twierdzenie Picarda-Lindelöfa dla podanych niżej zagadnień Cauchy'ego udowodnij, że rozwiązanie $y = y(t)$ istnieje na zadanym przedziale:

a) $y' = y^2 + \cos t^2$, $y(0) = 0$, $0 \le t \le \frac{1}{2}$, b) $y' = 1 + y + y^2 \cos t$, $y(0) = 0$, $0 \le t \le \frac{1}{3}$.

Zadanie 5. Rozważmy równanie $2y = t^2 y''$. Rozwiązania $y \equiv 0$ i $y = t^2$ spełniają warunki początkowe $y = y' = 0$ dla $t = 0$. Wyjaśnij, dlaczego zachodzi ta niejednoznaczność rozwiązań.

Zadanie 6. Pokaż, że jeżeli zagadnienie $y' = f(t,y),\ y(t_0) = y_0$ ma dwa rozwiązania, to ma ich nieskończenie wiele.

Zadanie 7. Zbadaj ilość rozwiązań zagadnienia w zależności od wartości parametru a:

a) $y' = y^a$, $y(0) = 0$, b) $y' = y\,|\log y|^a$, $x(0) = 0$.

Zadanie 8. Znajdź rozwiązanie zagadnienia $y' = t\sqrt{1-y^2}$, $y(0) = 1$, różne od rozwiązania $y(t) \equiv 1$. Które z założeń twierdzenia Picarda-Lindelöfa nie jest spełnione?

Zadanie 9. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Pokaż, że zagadnienie $y' = f(y,t) + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $y(0) = y_0$, nie ma jednoznacznego rozwiązania co najwyżej dla przeliczalnej ilości λ.

Zadanie 10. Niech $y(t)$ będzie nieujemną ciągłą funkcją spełniającą

$$y(t) \le L \int_{t_0}^{t} y(s)\, ds$$

na odcinku $t_0 \le t \le t_0 + \alpha$. Udowodnij, że $y(t) = 0$ dla $t_0 \le t \le t_0 + \alpha$ (łatwiejsza wersja lematu Gronwalla). WSKAZÓWKA: Pokaż indukcyjnie, że $y(t) \leqslant c(L^n/n!)(t - t_0)^n$.

Zadanie 11. Stosując lemat Gronwalla udowodnij, że $y(t) = -1$ jest jedynym rozwiązaniem zagadnienia $y' = t(1+y)$, $y(0) = -1$.