B. Wróblewski

Układy równań liniowych

Zadanie 1. Pokaż, że dla zadanej macierzy A funkcja wykładnicza e^{tA} jest podanej postaci:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad e^{At} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos bt & \sin bt \\ -\sin bt & \cos bt \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad e^{At} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Zadanie 2. Znajdź macierz A, dla której

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} - e^t & e^{2t} - e^t & e^t - e^{2t} \\ e^{2t} - e^t & 2e^{2t} - e^t & e^t - e^{2t} \\ 3e^{2t} - 3e^t & 3e^{2t} - 3e^t & 3e^t - 2e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Zadanie 3. Obliczając wartości własne i wektory własne macierzy układu, rozwiąż zagadnienia początkowe:

a) $y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $y' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $y' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Zadanie 4. Wyznacz wszystkie wektory y_0 takie, że rozwiązanie zagadnienia

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad y(0) = y_0$$

jest okresową funkcją t.

Zadanie 5. Znajdź macierz fundamentalną układu

$$y' = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -10 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix} y \ .$$

Zadanie 6. Niech W będzie podprzestrzenią niezmienniczą operatora liniowego $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Pokaż, że jeżeli $y_0 \in W$, to rozwiązanie $y(t)$ zagadnienia $y' = Ay, \quad y(0) = y_0$ spełnia $y(t) \in W$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$.

Zadanie 7. Załóżmy, że przynajmniej jedna wartość własna operatora liniowego A na $\mathbb{R}^n$ ma ściśle dodatnią część rzeczywistą. Pokaż, że dla dowolnych $a \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ istnieje rozwiązanie równania $y' = Ay$ takie, że $\|y(0) - a\| < \varepsilon$ oraz $\lim\limits_{t\to\infty} \|y(t)\| = \infty$.

Zadanie 8. Załóżmy, że $\phi_k(t)$ $(k = 1, 2, ..., n)$ są rozwiązaniami zagadnienia $y' = Ay$, $y(0) = e_k$ $(e_k = (0, ..., 1, ...0)$ – jedynka na k-tym miejscu). Udowodnij, że $e^{At} = (\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t))$.

Zadanie 9. Rozważamy układ n równań $y' = Ay + e^{\lambda t} v$, gdzie v jest wektorem własnym macierzy A odpowiadającym wartości własnej λ. Załóżmy, że macierz A ma n liniowo niezależnych wektorów własnych odpowiadających różnym wartościom własnym.

a) Pokaż, że nie istnieje wektor $a \in \mathbb{R}^n$ taki, że $\psi(t) = ae^{\lambda t}$ jest rozwiązaniem.

b) Pokaż, że rozwiązaniem jest $\psi(t) = ae^{\lambda t} + bte^{\lambda t}$ dla odpowiednio dobranych wektorów $a, b \in \mathbb{R}^n$.