B. Wróblewski

Równania liniowe skalarne wyższych rzędów

Zadanie 1. Znajdź rozwiązania ogólne równań:

a) $y'' + y' - 2y = 0$,
c) $y^{(5)} - 6y^{(4)} + 9y^{(3)} = 0$,
e) $y'' - 2y' + y = 6te^t$,
b) $y^{(4)} + 4y = 0$,
d) $y'' + y = 4\sin t$,
f) $y'' - 5y' = 3t^2 + \sin 5t$.

Zadanie 2. Znajdź rozwiązania szczególne równań

a) $y''-2y'+2y = e^t+t\cos t$, b) $y'' - y = 4\,\mathrm{sh}\,t$, c) $y'' + 3y = t^3 - 1$,

nie korzystając z metody uzmienniania parametrów.

Zadanie 3. Znajdź rozwiązania ogólne równań

a) $y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t}$, b) $y'' + 4y = 2\,\mathrm{tg}\,t$, c) $y'' - 4y' + 4y = te^{2t}$,

używając metody uzmienniania parametrów.

Zadanie 4. Rozwiąż zagadnienia początkowe

a) $y^{(3)} - y' = 0$,
$y(0) = 3,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 1$,

b) $y^{(3)} - 3y' - 2y = 9e^{2x}$,
$y(0) = 0,\ y'(0) = -3,\ y''(0) = 3$.

Zadanie 5. Skonstruuj równanie różniczkowe liniowe jednorodne trzeciego rzędu, które spełniają funkcje t, t^2, e^t.

Zadanie 6. Załóżmy, że równanie $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$ ma trzy rozwiązania:

$$t^2, \quad t^2 + e^{2t}, \quad 1 + t^2 + 2e^{2t}.$$

Znajdź rozwiązanie ogólne.

Zadanie 7. Załóżmy, że $a > 0$, $b > 0$ i $c > 0$. Udowodnij, że każde rozwiązanie równania $ay'' + by' + cy = 0$ dąży do 0 gdy $t \to \infty$.

Zadanie 8. Znajdź postać ogólną rozwiązania równania $y'' + y = f(t)$. Znajdź warunki jakie powinna spełniać funkcja f na to, aby wszystkie rozwiązania tego równania były ograniczone dla $t \to +\infty$.

Zadanie 9. Pokaż, że rozwiązanie równania $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ albo ma na każdym skończonym przedziale $[a, b]$ tylko skończenie wiele zer, albo jest tożsamościowo równe zeru. Jak uogólnić ten wynik na równania liniowe wyższego rzędu?

Zadanie 10. Udowodnij, że rozwiązania równania $y''+p(x)y'+q(x)y = 0$ z $q(x) < 0$ nie mogą mieć dodatnich maksimów (lokalnych).

Zadanie 11. Niech $y_1(t)$ i $y_2(t)$ będą rozwiązaniami równania $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, gdzie $p(t)$ i $q(t)$ są ciągłe w pewnym przedziale $[\alpha, \beta]$. Oznaczmy

$$W(t) = W[y_1(t), y_2(t)] = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t).$$

Pokaż, że dla każdych $t, t_0 \in [\alpha, \beta]$ jest prawdziwa równość

$$W[y_1(t), y_2(t)] = W[y_1(t_0), y_2(t_0)] \exp\left(-\int_{t_0}^{t} p(s)\, \mathrm{d}s\right).$$

Wyjaśnij związek z twierdzeniem Liouville'a dla układów równań. Wywnioskuj, że wyznacznik Wrońskiego $W[y_1(t), y_2(t)]$ jest albo tożsamościowo równy 0 lub nigdy nie zeruje się na przedziale $[\alpha, \beta]$ oraz że jeżeli jest stały to jest tożsamościowo równy zero.

Zadanie 12. Pokaż, że jeżeli wszystkie rozwiązania y i ich pochodne y' równania $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ dążą do 0 gdy $t \to \infty$, to $\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds \to +\infty$ dla $t \to +\infty$.

Zadanie 13. Udowodnij, że $y(t) = t^2$ nigdy nie może być rozwiązaniem równania $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ dla ciągłych $p(t)$ i $q(t)$.

Zadanie 14. Funkcja $y_1(t) = e^{-t^2/2}$ jest rozwiązaniem równania $y'' + ty' + y = 0$. Znajdź drugie rozwiązanie liniowo niezależne.

Zadanie 15. Funkcja $y_1(t) = t$ jest rozwiązaniem równania $y'' + ty' - y = 0$. Znajdź drugie rozwiązanie liniowo niezależne.

Zadanie 16. Rozważamy równanie $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$.

a) Używając podstawienia $y(x) = z(x) \exp\left(-\frac{1}{2}\int p(s)\, ds\right)$ sprowadź powyższe równanie do postaci $z'' + b(x)z = 0$.

b) Spróbuj znaleźć podstawienie redukujące wyjściowe równanie do $w'' + c(x)w' = 0$.

c) Zakładając, że y_1 jest rozwiązaniem, znajdź rozwiązanie y_2 (w postaci $y_2 = y_1 z$) niezależne od y_1.

Zadanie 17. Znajdź rozwiązanie (w postaci szergu potęgowego) następującego zagadnienia:

$$t(2-t)y'' - 6(t-1)y' - 4y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0.$$

Zadanie 18. Znajdź rozwiązanie ogólne *równania Czebyszewa*

$$(1-t^2)y'' - ty' + 9y = 0,$$

jeżeli wiadomo, że ma ono rozwiązanie szczególne będące wielomianem stopnia 3.
UWAGA: *Równanie Czebyszewa* $(1-t^2)y'' - ty' + n^2 y = 0$ zawsze ma rozwiązanie szczególne będące wielomianem stopnia n.

Zadanie 19. Równanie postaci $y'' - 2ty' + \lambda y = 0$, gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$ nazywa się *równaniem Hermite'a*.

a) Znajdź dwa niezależne rozwiązania równania Hermite'a.

b) Udowodnij, że dla $\lambda = 2n$ (n – liczba naturalna) równanie Hermite'a ma rozwiązanie w postaci wielomianu stopnia n.