B. WRÓBLEWSKI

ROZWAŻAMY UKŁADY RÓWNAŃ POSTACI $(x'(t), y'(t)) = (f_1(x,y),\ f_2(x,y))$.

Stabilność w sensie Lapunowa

Zadanie 1. Ustal, czy rozwiązania stacjonarne równania $x' = -x(1-x)$ są stabilne czy niestabilne w sensie Lapunowa.

Zadanie 2. Zbadaj stabilność rozwiązań zagadnienia początkowego:

a) $y' = 1 + t - y, \quad y(0) = 0$; b) $y' = 2t(y+1), \quad y(0) = 0$.

Zadanie 3. Udowodnij, że wszystkie rozwiązania równania $y' = y^2$ z warunkiem początkowym $x(0) \geq 0$ są niestabilne, natomiast rozwiązania z warunkiem początkowym $x(0) < 0$ są stabilne w sensie Lapunowa.

Zadanie 4. Udowodnij, że stabilność rozwiązań dowolnego rozwiązania $y(t)$ niejednorodnego układu równań liniowych $y' = Ay + f(t)$ jest równoważna stabilności rozwiązania stacjonarnego $y \equiv 0$ równania jednorodnego $y' = Ay$.

Punkty stacjonarne układów na płaszczyźnie

Zadanie 5. Nie obliczając wartości własnych poniższej macierzy udowodnij, że każde rozwiązanie układu

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

zbiega do zera gdy $t \to \infty$.

WSKAZÓWKA: Udowodnij, że proste $y = 3x$ oraz $x = 3y$ dzielą płaszczyznę fazową na cztery obszary, w których pochodne x' i y' mają ustalony znak.

Zadanie 6. Naszkicuj portrety fazowe następujących układów równań różniczkowych:

a) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Zadanie 7. Zbadaj charakter punktów stacjonarnych układów równań:

a) $x' = y + 3x^2, \quad y' = x - 3y^2$; c) $x' = e^{x+y} - 1, \quad y' = \sin(x+y)$;

b) $x' = y + \cos y - 1, \quad y' = -\sin x + x^3$; d) $x' = -xy^4, \quad y' = x^4 y$.

(Czy punkt jest hiperboliczny? Czy jest węzłem, ogniskiem, środkiem? Czy jest stabilny?)

Zadanie 8. Określ, dla jakich wartości parametrów a i b rozwiązanie zerowe jest stabilne

a) $x' = ax - 2y + x^2, \quad y' = x + y + xy$; b) $\dot{x} = ax + y + x^2, \quad y' = x + by + y^2$.

Zadanie 9. Udowodnij, że każda orbita układu $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ jest elipsą.

Zadanie 10. Wyznacz wszystkie orbity następujących układów:

a) $x' = y(1 + x + y), \quad y' = -x(1 + x + y);$ b) $x' = 2xy, \quad y' = x^2 - y^2.$

Zadanie 11. Udowodnij, że wszystkie rozwiązania $x(t), y(t)$ układu

$$x' = x^2 + y \sin x, \qquad y' = -1 + xy + \cos y,$$

które startują w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych pozostają tam dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$.

Zadanie 12. Udowodnij, że wszystkie rozwiązania układu

$$x' = y(e^x - 1), \qquad y' = x + e^y,$$

które startują w prawej półpłaszczyźnie układy współrzędnych ($x > 0$) pozostają tam dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$.

Zadanie 13. Udowodnij, że wszystkie rozwiązania układu

$$x' = -1 - y + x^2, \quad y' = x + xy,$$

które startują wewnątrz okręgu $x^2 + y^2 = 1$ pozostają tam dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$.
WSKAZÓWKA: Oblicz $d(x^2 + y^2)/dt$.

Zadanie 14. Dla układu

$$x' = y + x^2, \qquad y' = x + y^2$$

udowodnij, że jeżeli $x(t_0) \neq y(t_0)$ dla pewnego t_0, to $x(t) \neq y(t)$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$.

Zadanie 15. Przeanalizuj poniższe układy równań i narysuj ich portrety fazowe:

a) $x' = \sin x, \qquad y' = \sin y;$

b) $x' = \frac{1}{2}(x + y) + x^2, \qquad y' = \frac{1}{2}(3y - x);$

c) $x' = x - xy, \qquad y' = -y + xy;$

d) $x' = x - x^2 + y^2, \qquad y' = y - \frac{1}{2}xy;$

(Wyznacz izokliny, znajdź punkty stacjonarne, zbadaj ich charakter i stabilność, narysuj portret fazowy.)

Zadanie 16. Narysuj portret fazowy dla $x_1 > 0$ i $x_2 > 0$ następującego układu typu drapieżnik-ofiara

$$x_1' = x_1(1 - x_2 - \alpha x_1), \quad x_2' = -x_2(1 - x_1 + \alpha x_2) \quad \text{dla } \alpha \in [0, 1).$$