B. WRÓBLEWSKI

Proste równania cząstkowe

Zadanie 1. Znajdź rozwiązania ogólne $u = u(x, y)$ następujących równań:

a) $u_x = 1,$ b) $u_{yy} = 6y$ c) $u_x + y = 0.$

Zadanie 2. Znajdź funkcję $u = u(x, y)$ spełniającą podane równanie różniczkowe cząstkowe i warunki dodatkowe:

a) $u_{xx} = 6x; u(0, y) = y, \quad u(1, y) = y^2 + 1$ b) $yu_{yy} + u_y = 0; u(x, 1) = x^2, \quad u(x, e) = 1.$

Zadanie 3. Znaleźć rozwiąznie ogólne równania $3u_y + u_{xy} = 0$ (Wsk. Podstawić $v = u_y$). Czy istnieje jedyne rozwiązanie przy dodatkowych warunkach $u(x, 0) = e^{-3x},\ u_y(x, 0) = 0$?

Równania cząstkowe pierwszego rzędu – metoda charakterystyk

Zadanie 4. Wyznacz rozwiązania ogólne równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu:

a) $yuu_x - xuu_y = e^u$, b) $yu_x + uu_y = \frac{y}{x}$.

Zadanie 5. Znajdź rozwiązania równań spełniające dodatkowe warunki:

a) $u_x + u_y + 2u_z = 0$, $u = yz$ dla $x = 1$; c) $xu_x - 2yu_y = x^2 + y^2$, $z = x^2$ dla $y = 1$;

b) $y^2u_x + xyu_y = x$,$u = y^2$ dla $x = 0$; d) $xu_x - yu_y = 0$, $u = 1$ dla $y = \frac{1}{x}$.

Zadanie 6. Znajdź powierzchnię spełniającą równanie $xu_x + yu_y = 2xy$ i przechodzącą przez krzywą $y = x$, $u = x^2$.

Zadanie 7. Znajdź ogólną postać rozwiązania równania $u_x - u_y = f(x, y)$.

Zadanie 8. Rozwiąż równanie $au_x + bu_y + cu = 0$, gdzie a, b, c są stałymi.
WSKAZÓWKA: Szukaj rozwiązania w postaci $u(x, y) = v(x, y)e^{\alpha x}$ dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R}$.

Zadanie 9. Wyjaśnij dlaczego nie istnieje rozwiązanie równania liniowego $u_x + u_y = u$ przechodzące przez prostą $x = t$, $y = t$, $u = 1$.

Zadanie 10. Pokaż, że jeżeli dane początkowe dla równania

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y, u) = 0$$

są zadane na charakterystyce, to albo nie istnieje żadne rozwiązanie, albo jest nieskończenie wiele rozwiązań.

Zadanie 11. Udowodnij, że rozwiązanie równania $u_t + a(u)u_x = 0$ z warunkiem początkowym $u(x, 0) = h(x)$ w niejawny sposób może być zadane jako $u = h(x - a(u)t)$. Uzasadnij, że jeżeli $a(h(s))$ nie jest niemalejącą funkcją argumentu s, to u przestaje być dobrze określone dla pewnego $t > 0$.