B. Wróblewski

Metoda Fouriera – rozdzielanie zmiennych

Zadanie 1. Rozważmy równanie różniczkowe zwyczajne z warunkami brzegowymi:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(l) = 0.$$

Zbadaj liczbę rozwiązań zagadnienia w zależności od l.

Zadanie 2. Dla jakich wartości λ zagadnienie

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi)$$

ma nietrywialne rozwiązanie?

Zadanie 3. Skonstruuj rozwiązanie następujących zagadnień metodą rozdzielania zmiennych:

a) $u_x = u_y$ dla $x, y \in \mathbb{R}$, $u(0, y) = e^y + e^{-2y}$;

b) $u_t = u_{xx} + u$ dla $x \in (0, 1)$, $t > 0$ oraz $u(x, 0) = \sin \pi x$, $u(0, t) = u(1, t) = 0$.

Zadanie 4. Znajdź szereg Fouriera funkcji

a) $f(x) = x$ na $(-\pi, \pi)$, b) $f(x) = |x|$ na $(-1, 1)$, c) $f(x) = e^x$ na $(0, 2\pi)$.

Zadanie 5. Rozwiąż zagadnienie początkowo-brzegowe dla równania ciepła $u_{tt} = u_{xx}$ w prostokącie $(0, 1) \times (0, T)$ z warunkami początkowymi $u(x, 0) = f(x)$ i $u_t(x, 0) = g(x)$ oraz warunkami brzegowymi $u(0, t) = u(1, t) = 0$. Podaj postać rozwiązania dla

a) $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ 2(1-x) & \frac{1}{2} \le x \le 1, \end{cases} \quad g(x) \equiv 0$ b) $f(x) \equiv 0, \quad g(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < \frac{1}{4}, \\ 1 & \frac{1}{4} \le x \le \frac{3}{4}, \\ 0 & \frac{3}{4} < x \le 1. \end{cases}$

Czy otrzymane rozwiązania w postaci szeregów można dwukrotnie różniczkować? Zaproponuj warunki na funkcje f i g dla których uzyskane rozwiązania są rozwiązaniami klasycznymi.

Zadanie 6. Rozwiąż zagadnienie początkowo-brzegowe dla równania ciepła $u_t = u_{xx}$ w prostokącie $(0, 1) \times (0, T)$ z warunkiem początkowym $u(x, 0) = f(x)$ oraz warunkami brzegowymi $u(0, t) = u(1, t) = 0$. Podaj postać rozwiązania dla $f(x) = 4x(1 - x)$.
Wykaż, że rozwiązanie jest dwukrotnie różniczkowalne dla $t > 0$, wykorzystując zbieżność jednostajną odpowiednich szeregów pochodnych.

Zadanie 7. Rozwiąż zagadnienie początkowo-brzegowe $tu_t = u_{xx} + 2u$ z warunkiem początkowym $u(x, 0) = f(x)$ oraz warunkami brzegowymi $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$. Udowodnij, że równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań spełniających warunek początkowy $u(x, 0) = 0$.
Wniosek: brak jednoznaczności rozwiązań.