B. WRÓBLEWSKI

*Równanie fali:* $u_{tt} = c^2 \Delta u.$

**Zadanie 1.** Rozwiąż zagadnienie struny półnieskończonej, tzn. poniższe zagadnienie brzegowo-początkowe dla równania falowego:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{dla } x > 0, t > 0, \\ u(x,0) = f(x) & \text{dla } x > 0, \\ u_t(x,0) = g(x) & \text{dla } x > 0, \\ u(0,t) = 0 & \text{dla } t \geq 0. \end{cases}$$

W szczególności zapisz rozwiązanie dla $f(x) = x \exp(-x^2)$, $g(x) = 0$.
WSKAZÓWKA: Skorzystaj ze wzoru d'Alemberta.

**Zadanie 2.** Rozwiąż następujące zagadnienie dla równania falowego:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{dla } x > 0, t > 0, \\ u(x,t) = f(x) & \text{dla } x \in R, t = kx, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, ) = g(x) & \text{dla } x \in R, t = kx, \end{cases}$$

gdzie $k > 0$ i $n$ jest wektorem normalnym do tej prostej. Zbadaj przypadek $k = c$, czyli tak zwane *zagadnienie Goursata*.

**Zadanie 3.** Załóżmy, że funkcja $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ spełnia zagadnienie Cauchy'ego w prostej dla równania falowego z warunkami początkowymi $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$, gdzie $f, g$ są funkcjami gładkimi o zwartym nośniku. Niech

$$P(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u_x^2(x,t)\, \mathrm{d}x, \qquad K(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u_t^2(x,t)\, \mathrm{d}x$$

($P(t)$ nazywamy energią potencjalną, a $K(t)$ energią kinetyczną) Pokaż, że $K$ i $P$ są poprawnie określonymi funkcjami oraz:

a) $K(t) + P(t)$ nie zależy od $t$ (zasada zachowania energii),

b) $K(t) = P(t)$ dla dostatecznie dużych $t$ (zasada ekwipartycji energii).

**Zadanie 4.** Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ będzie zbiorem ograniczonym i otwartym o gładkim brzegu $\partial\Omega$. Rozważamy zagadnienie brzegowo-początkowe:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = h & \text{dla } x \in \Omega, 0 < t < T, \\ u(x,0) = f(x) & \text{dla } x \in \Omega, \\ u_t(x,0) = g(x) & \text{dla } x \in \Omega, \\ u(x,t) = 0 & \text{dla } x \in \partial\Omega, 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Udowodnij metodą energetyczną, że to zagadnienie ma co najwyżej jedno rozwiązanie.

*Równanie ciepła:* $u_t = \Delta u$

**Zadanie 5.** Udowodnij następującą zasadę porównawczą dla równania ciepła:
Jeżeli $u$ i $v$ są dwoma rozwiązaniami takimi, że $u \leq v$ dla $t = 0$ oraz dla $x = 0$ i dla $x = \ell$, to wówczas $u \leq v$ dla wszystkich $0 \leq t < \infty$, $0 \leq x \leq \ell$.

**Zadanie 6.** Rozważamy równanie ciepła w odcinku $(0, 1)$ z warunkami brzegowymi $u(0, t) = u(1, t) = 0$ i warunkiem początkowym $u(x, 0) = 4x(1 - x)$.

a) Udowodnij, że $0 \leq u(x, t) \leq 1$ dla wszystkich $t > 0$ i $0 < x < 1$.

b) Udowodnij, że $u(x, t) = u(1 - x, t)$ dla wszystkich $t \geq 0$ i $0 \leq x \leq 1$.

c) Udowodnij, że $\int_0^1 u^2(x, t)\,\mathrm{d}x$ jest ściśle malejącą funkcją $t$.

Porównaj powyższe fakty z ogólnymi własnościami równania ciepła

**Zadanie 7.** Rozważamy równanie ciepła na odcinku $(0, \ell)$ z warunkami brzegowymi typu Robina, tzn.

$$\begin{cases} u_x(0, t) - a_0 u(0, t) = 0, \\ u_x(\ell, t) + a_\ell u(\ell, t) = 0. \end{cases}$$

Udowodnij używając metody energetycznej, że jeżli $a_0 > 0$ i $a_\ell > 0$, to $\int_0^\ell u^2(x, t)\ dx$ maleje jako funkcja $t$.

**Zadanie 8.** Niech $b > 0$ będzie stałe. Rozwiąż równanie ciepła ze stałą dysypacją:

$$\begin{cases} u_t - k u_{xx} + bu = 0 \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \phi(x). \end{cases}$$

Zastosuj zamianę zmiennych $u(x, t) = e^{-bt} v(x, t)$. Następnie rozwiąż równanie ciepła ze zmienną dysypacją:

$$\begin{cases} u_t - k u_{xx} + bt^2 u = 0 \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \phi(x). \end{cases}$$

Rozważając równanie zwyczajne $w_t + bt^2 w = 0$ wywnioskuj odpowiednią zamianę zmiennych.

**Zadanie 9.** Załóżmy, że $g$ jest funkcją ograniczoną na $\mathbb{R}^d$ spełniającą warunek

$$\lim_{R \to \infty} \frac{1}{\omega_d R^d} \int_{|x| \leq R} g(x)\,\mathrm{d}x = a.$$

Udowodnij, że rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego dla równania ciepła w $\mathbb{R}^d$ z warunkiem początkowym $u(x, 0) = g(x)$, stabilizuje się do $a$, tzn. $\lim\limits_{t \to \infty} u(x, t) = a$ niemal jednostajnie ze względu na $x$.

**Zadanie 10.** Rozważamy zagadnienie Cauchy'ego dla tak zwanego *lepkościowego równania Burgersa*:

$$\begin{cases} u_t + uu_x = u_{xx} & \text{dla } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & \text{dla } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Pokaż, że przy pomocy zamiany zmiennych $u = C\frac{v_x}{v}$ dla pewnego $C$ sprowadza się ono do zagadnienia Cauchy'ego dla równania ciepła z warunkiem początkowym

$$v(x,0) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s\right\}.$$

## *Równanie Laplace'a:* $-\Delta u = 0$

**Zadanie 11.** Wykaż, że równanie Laplace'a jest niezmiennicze na obroty tzn. jeżeli $u$ jest harmoniczna w $\mathbb{R}^d$ i $A$ jest macierzą ortogonalną to $w(x) = u(Ax)$ jest harmoniczna w $\mathbb{R}^d$.

**Zadanie 12.** Udowodnij poniższe własności funkcji harmonicznych:

a) *Twierdzenie Harnacka*: Jeżeli ciąg funkcji harmonicznych $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ w obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ jest zbieżny niemal jednostajnie do funkcji $u$, to $u$ jest funkcją harmoniczną w $\Omega$.

b) *Twierdzenie Liouville'a*: Ograniczona funkcja harmoniczna w $\mathbb{R}^d$ jest funkcją stałą.

WSKAZÓWKA: Użyj własności wartości średniej charakteryzującej funkcje harmoniczne.

**Zadanie 13.** Znajdź wartości własne i funkcje własne operatora Laplace'a w prostokącie $(0,a)\times(0,b)$, tzn. wyznacz $\lambda = \lambda_k$ i $u = u_k$ spełniające równanie $-\Delta u = \lambda u$ w $(0,a)\times(0,b)$ i warunek Dirichleta $u = 0$ na brzegu prostokąta.

**Zadanie 14.** Załóżmy, że $u$ jest funkcją hamoniczną w zbiorze otwartym $\Omega$. Pokaż, że funkcje $|\nabla u|^2$ oraz $\varphi \circ u$, dla wypukłej i gładkiej $\varphi$, są podharmoniczne.

**Zadanie 15.** Skonstruuj funkcję Greena dla półprzestrzeni $\mathbb{R}^d_+ = \{x \in \mathbb{R}^d : x_d > 0\}$.