B. WRÓBLEWSKI

Transformata Laplace'a

Zadanie 1. Niech $f(t) = t^a e^{-bt}$ dla pewnych dodatnich stałych a i b. Udowodnij, że funkcja f jest podwykładnicza z wykładnikiem $-b < \alpha < 0$.

Zadanie 2. Załóżmy, że $f(t)$ ma wzrost podwykładniczy. Udowodnij, że $\lim\limits_{s\to\infty} \mathcal{L}\{f\}(s) = 0$.

Zadanie 3. Stosując równość $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ oblicz $\mathcal{L}\{t^{-1/2}\}$.

Zadanie 4. Udowodnij Fakt 2 i Fakt 3.

Zadanie 5. Załóżmy, że $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ oraz że granica $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t}$ istnieje. Udowodnij wzór

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s) = \int_s^\infty F(u)\,\mathrm{d}u.$$

Zadanie 6. Oblicz transformaty Laplace'a funkcji :

a) t^n,
b) $t^n e^{at}$,
c) $t \sin at$,
d) $t^2 \cos at$,
e) $t^k e^{at} \cos bt$,
f) $t^k e^{at} \sin bt$,
g) $\frac{\sin t}{t}$,
h) $\frac{\cos at - 1}{t}$,
i) $\frac{e^{at} - e^{bt}}{t}$.

Zadanie 7. Pokaż, że zachodzi wzór Borela:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t-v)g(v)\ \mathrm{d}v\right\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)\mathcal{L}\{g\}(s).$$

Z jego pomocą wyznacz transformatę odwrotną funkcji $\frac{1}{s^2(s^2+1)}$.

Zadanie 8. Stosując transformatę Laplace'a znajdź rozwiązania następujących zagadnień:

a) $y' - y = te^t$, $y(0) = 0$;
b) $y'' + y = \sin t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$;
c) $y'' + y = t\sin t$, $y(0) = 1$,$y'(0) = 2$;
d) $y'' - 5y' + 4y = e^{2t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

Zadanie 9. Stosując transformatę Laplace'a znajdź rozwiązania następujących zagadnień:

a) $\begin{cases} x' = 12x + 5y, & x(0) = 0, \\ y' = -6x + y, & y(0) = 1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' = x - y - e^{-t}, & x(0) = 0, \\ y' = 2x + 3y + e^{-t}, & y(0) = 0. \end{cases}$

Niech $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją kawałkami ciągłą, o *wzroście podwykładniczym z wykładnikiem* α, tzn. istnieją stałe M i α takie, że dla wszystkich $t > 0$ mamy

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}.$$

Definicja 1. Transformatę Laplace'a funkcji f oznaczamy przez $\mathcal{L}\{f\}(s)$ i definiujemy wzorem

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt.$$

Fakt 2. Własności transformaty Laplace'a:

a) $\mathcal{L}\{af + bg\}(s) = a\mathcal{L}\{f\}(s) + b\mathcal{L}\{g\}(s)$,

b) $\mathcal{L}\{f')\} = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0)$,

c) $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f\}(s)$,

d) $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \mathcal{L}\{f\}(s - a)$.

Fakt 3.

a) $\mathcal{L}\{1\} = \begin{cases} \frac{1}{s}, & s > 0 \\ \text{nie istnieje}, & s \leq 0 \end{cases}$

b) $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \begin{cases} \frac{1}{s-a}, & s > a \\ \text{nie istnieje}, & s \leq a \end{cases}$

c) $\mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \begin{cases} \frac{\omega}{s^2+\omega^2}, & s > 0 \\ \text{nie istnieje}, & s \leq 0 \end{cases}$

d) $\mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \begin{cases} \frac{s}{s^2+\omega^2}, & s > 0 \\ \text{nie istnieje}, & s \leq 0 \end{cases}$

Fakt 4. Jeżeli funkcje ciągłe f, g mają takie same transformaty Laplace'a to są one równe.

Przykład 5. Rozważmy zagadnienie

$$y'' + y = \sin t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Kładąc $\mathcal{L}\{y\}(s) = F(s)$ wyznaczamy transformatę Laplace'a lewej strony równania:

$$\mathcal{L}\{y'' + y\}(s) = s\mathcal{L}\{y'\}(s) - y'(0) + F(s) = s\Big(s\mathcal{L}\{y\}(s) - y(0)\Big) - y'(0) + F(s) = s^2F(s) + F(s).$$

Z kolei transformata prawej strony to:

$$\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Otrzymujemy równanie algebraiczne

$$s^2F(s) + F(s) = F(s)(s^2 + 1) = \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Szukamy zatem funkcji $y(t)$ takiej, że $\mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{1}{(s^2+1)^2}$. Zauważmy, że

$$\mathcal{L}\{t\cos t\}(s) = -\mathcal{L}\{-t\cos t\}(s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{\cos t\}(s) = -\frac{d}{ds}\frac{s}{s^2 + 1} = \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2}.$$

Korzystając z tożsamości

$$\frac{2}{(s^2 + 1)^2} = \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2}$$

dostajemy

$$\frac{2}{(s^2 + 1)^2} = \mathcal{L}\{\sin t\} - \mathcal{L}\{t\cos t\} = \mathcal{L}\{\sin t - t\cos t\}.$$

Zatem rozwiązaniem zagadnienia jest funkcja $y(t) = \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$.