Zadanie 1. Korzystając z twierdzenia Picarda-Lindelöfa pokaż, że zagadnienie

$$\begin{aligned} &y'(t) = y^2 + (1+t)^2 \cos(t), \\ &y(0) = 0 \end{aligned}$$

ma jednoznaczne rozwiązanie zdefiniowane co najmniej na przedziale $\left[\frac{-\sqrt{3}+1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right]$.

ROZWIĄZANIE:
Niech $Q_{a,b} = [-a,a] \times [-b,b]$. Funkcja $f(t,y)$ po lewej stronie jest oczywiście ciągła na każdym takim prostokącie. Jest też Lipschitzowska, ponieważ

$$\sup_Q \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \sup_{[-b,b]} \left|2y\right| = 2b.$$

Mamy też oszacowanie

$$\sup_Q |f| = \sup_{[-b,b]} y^2 + \sup_{[-a,a]} (1+t)^2 |\cos t| \leq b^2 + (1+a)^2.$$

Zatem z tw P-L mamy istnienie na przedziale

$$\alpha = \min\{a, \frac{1}{2b}, \frac{b}{b^2+(1+a)^2}\}.$$

za to trzy punkty. Aby wykazać tezę musimy znaleźć takie a, b żeby

$$a \geq \frac{\sqrt{3}-1}{2} \qquad \frac{1}{2b} \geq \frac{\sqrt{3}-1}{2} \qquad \frac{b}{b^2+(1+a)^2} \geq \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

czyli

$$a \geq \frac{\sqrt{3}-1}{2} \qquad b \leq \frac{\sqrt{3}+1}{2} \qquad \frac{b}{b^2+(1+a)^2} \geq \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Ponieważ trzecie wyrażenie maleje wraz z wzrostem a, a drugie od a nie zależy, więc przyjmijmy najmniejsze możliwe $a = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Wtedy trzecia nierówność po podstawieniu to

$$b \geq \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)\left(b^2 + \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2\right),$$

co po porządkach daje

$$0 \geq \left(b - \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2.$$

Zatem szukana para istnieje i są to $a = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ i $b = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$. **Za to trzy punkty.**

UWAGI:
Przydatne było $\frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

Zadanie 2. Podaj macierz fundamentalną równania

$$y' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} y.$$

ROZWIĄZANIE:
Widać, że macierz jest w postaci trzech bloków (1x1, 1x1, 2x2) więc można je rozważać osobno. Wektor $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ jest wektorem własnym z wartością w. 2, zatem $h_1(t) = e^{2t}e_1$ jest rozwiązaniem. **Jeden punkt**. Wektor $e_2 = (0, 1, 0, 0)$ jest wektorem własnym z wartością w. 1, zatem $h_2(t) = e^t e_2$ jest rozwiązaniem. **Jeden punkt**.
Bierzemy się za blok 2x2. Rozpisując go jako układ mamy

$$\begin{cases} y_3' = -y_4, \\ y_4' = y_3. \end{cases}$$

Zatem mamy równanie na y_3 postaci $y_3'' = -y_3$. Przykładem dwóch niezależnych rozwiązań tego równania są $f(t) = \sin t$ i $g(t) = \cos t$. Zatem, skoro $y_4 = -y_3'$ to ostatecznie mamy macierz fundamentalną

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin t & \cos t \\ 0 & 0 & -\cos t & \sin t \end{pmatrix}.$$

Cztery punkty. Oczywiście jest dużo możliwych odpowiedzi.

UWAGI:
Macierz fundamentalna to macierz, której kolumny to liniowo niezależne rozwiązania równania. Dla równania $y' = Ay$ funkcja e^{tA}, jest macierzą fundamentalną, ale jest też takich macierzy kontinuum więcej. Jakąś macierz fundamentalną jest czasem łatwiej wyznaczyć niż e^{tA}, nie potrzeba do tego algebry liniowej. Podanie macierzy o współczynnikach zespolonych ***dawało dwa punkty z czterech.***

Zadanie 3. Rozwiąż równania:

a) $1 + e^{t/y} + e^{t/y}(1 - t/y)y' = 0$, b) $(1 + t + y + ty)y' = 1$.

ROZWIĄZANIE:

a) Jest to równanie w postaci różniczki zupełnej, bo

$$\frac{\partial}{\partial y}(1 + e^{t/y}) = e^{t/y}\frac{-t}{y^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}(e^{t/y}(1 - t/y)) = \frac{1}{y}e^{t/y} - \frac{1}{y}e^{t/y} - \frac{t}{y^2}e^{t/y}.$$

Łatwiej jest odcałkować $1 + e^{t/y}$ po t przez co otrzymujemy

$$\varphi(t, y) = t + ye^{t/y} + f(y).$$

Różniczkując po y i przyrównując mamy $f'(y) = 0$, czyli krzywe całkowe są postaci $t + ye^{t/y} = C$. **Za to trzy punkty.**

b) Równoważnie mamy

$$(1 + y)y' = \frac{1}{t + 1}$$

Odcałkowując mamy

$$\int 1 + y \; \mathrm{d}y = \int \frac{1}{t+1} \; \mathrm{d}t,$$

czyli

$$y + y^2/2 = \ln|t + 1| + c.$$

Koniec, **za to trzy punkty.**

UWAGI:

Z podpunktem a) można było walczyć przez podstawienie $z = t/y$ natomiast nie było to przyjemne. Tak samo b) można było sprowadzić do równania zupełnego przez czynnik całkujący, ale ponownie było to problematyczne. Częścią zadania było sprawdzenie, czy nie tylko kojarzycie metody ale czy umiecie zobaczyć kiedy którą lepiej stosować.

Zadanie 4. Znajdź postać ogólną rozwiązań równania

$$y^{(3)} + 2y'' = e^{-2t} + e^t + 1.$$

ROZWIĄZANIE:

Rozwiązujemy równanie jednorodne $y^{(3)}+2y'' = 0$, mamy równanie charakterystyczne $\lambda^2(\lambda + 2) = 0$ zatem

$$y_j(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-2t}.$$

Za to były dwa punkty. Szukamy teraz rozwiązań szczególnych równań:

1. $y^{(3)} + 2y'' = 1$
   Tu nie ma problemu, jak wrzucimy w lewą stronę wielomian 2-ego rzędu to trzecia pochodna nam go zniknie, a druga pochodna to dwa razy współczynnik przy t^2. Mamy zatem rozwiązanie $y_1(t) = t^2/4$. **Jeden punkt.**

2. $y^{(3)} + 2y'' = e^t$
   Też nie ma problemu, bo 1 nie jest rozwiązaniem równania charakterystycznego. Wstawiamy $y_2(t) = ce^t$ i dostajemy $y_2(t) = 1/3e^t$. **Jeden punkt.**

3. $y^{(3)} + 2y'' = e^{-2t}$
   Tutaj trzeba było pamiętać, że skoro -2 jest pierwiastkiem w.char. to trzeba szukać rozwiązania postaci $y_3(t) = cte^{-2t}$. Po porównaniu wielomianów wychodziło $y_3(t) = 1/4te^{-2t}$. **Dwa punkty.**

Zatem, z liniowości lewej strony równania, rozwiązanie ogólne jest postaci

$$y(t) = y_j + y_1 + y_2 + y_3.$$

UWAGI:

Zadanie można było też rozwiązać przez podstawienie $z = y''$ i zastosowanie czynnika całkującego. Niektórym nawet wyszły poprawne wyniki

Zadanie 5. Ciężarek o masie $m = 1$ kg zawieszono na sprężynie o stałej sprężystości $k = 1$ N/m. Cały układ zanurzony jest w lepkiej cieczy o współczynniku tłumienia $\mu = 2$ Ns/m. Sytuację tę modelujemy za pomocą równania różniczkowego

$$my'' = -ky - \mu y',$$

gdzie $y(t)$ jest położeniem ciężarka w chwili t. W momencie $t = 0$ ciężarek wychylono o $1/4$ m w górę od położenia równowagi. Udowodnij, że po nadaniu ciężarkowi w chwili początkowej prędkości 1 m/s w dół minie on położenie równowagi, a następnie powróci do stanu równowagi gdy $t \to \infty$.

ROZWIĄZANIE:
Mamy zatem do rozwiązania zagadnienie

$$\begin{aligned} y'' + 2y' + y &= 0, \\ y(0) &= 1/4, \\ y'(0) &= -1. \end{aligned}$$

Wielomian charakterystyczny jest postaci $W(\lambda) = (\lambda + 1)^2$ więc rozwiązanie ogólne jest postaci

$$y(t) = (c_1 + c_t)e^{-t}.$$

Po podstawieniu danych początkowych mamy:

$$y(t) = (1/4 - 3/4t)e^{-t}.$$

Za to dwa punkty. To, że funkcja ta zbiega do zera w nieskończoności i zeruje się dla jakiegoś $t_0 > 0$ jest jasne, ale trzeba było napisać. **Po dwa punkty**.

UWAGI:
Po przemyśleniu zadanie było mało precyzyjnie sformułowane. Prawie wszyscy zrozumieli je tak jak ja, natomiast jeżeli ktoś rozważał w sposób konsekwentny inną sytuację to dostawał maksa.