lokalne właściwe równe $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}+2n\pi}$;

h) w punkcie $x=-1$ funkcja $l$ ma maksimum lokalne właściwe równe $-2$, a w punkcie $x=1$ minimum lokalne właściwe równe 2;

i) w punkcie $x=1$ funkcja $m$ ma maksimum lokalne właściwe równe $\frac{\pi}{2}-\ln 2$.

**8.5** a) $f_{\min}=f(3)=-89$, $f_{\max}=f(6)=100$; b) $g_{\min}=g(-1)=-1$, $g_{\max}=g(5)=5-2\sqrt{5}$; c) $h_{\min}=h\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-2$, $h_{\max}=h\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$; d) $p_{\min}=p(3)=0$, $p_{\max}=p(4)=e^4$.

**8.6** a) Funkcja $f$ jest ściśle wypukła na $(-1,1)$ oraz ściśle wklęsła na $(-\infty,-1)$, $(1,\infty)$. Nie ma punktów przegięcia;

b) Funkcja $g$ jest ściśle wypukła na $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$, gdzie $k\in \boldsymbol{Z}$ oraz ściśle wklęsła na $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, gdzie $k\in\boldsymbol{Z}$. Punkty przegięcia wykresu tej funkcji to: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, gdzie $k\in\boldsymbol{Z}$;

c) Funkcja $h$ jest ściśle wypukła na $\left(k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, gdzie $k\in\boldsymbol{Z}$, oraz ściśle wklęsła na $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, k\pi\right)$, gdzie $k\in\boldsymbol{Z}$. Punkty przegięcia wykresu tej funkcji to: $x=k\pi$, gdzie $k\in\boldsymbol{Z}$;

d) funkcja $p$ jest ściśle wypukła na $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ oraz ściśle wklęsła na $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$. Punkt przegięcia wykresu tej funkcji to $x=\frac{1}{2}$.

# Dziewiąty tydzień

**Badanie funkcji (6.4).**

## Przykłady

### • Przykład 9.1

Zbadać przebieg zmienności podanych funkcji i następnie sporządzić ich wykresy:

a) $f(x)=x^3-3x^2+4$; b) $g(x)=\frac{\ln x}{x}$; c) $h(x)=e^{-x^2}$; d) $p(x)=\frac{x}{1-x^2}$.

**Rozwiązanie**

a) I. Dziedziną funkcji $f(x)=x^3-3x^2+4$ jest $\boldsymbol{R}$.

II. Funkcja $f$ jest ciągła na $\boldsymbol{R}$, bo jest wielomianem. Miejscami zerowymi funkcji $f$ są: $x_1=-1$, $x_2=2$. Funkcja $f$ przecina oś $Oy$ w punkcie $y=4$.

III. Obliczamy granice funkcji $f$ na „krańcach" dziedziny, czyli granice

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^3-3x^2+4\right)=\lim_{x\to-\infty}\left[x^3\left(1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^3}\right)\right]=(-\infty)\cdot 1=-\infty;$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^3-3x^2+4\right)=\lim_{x\to\infty}\left[x^3\left(1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^3}\right)\right]=\infty\cdot 1=\infty.$$

IV. Szukamy asymptot funkcji $f$. Ponieważ funkcja $f$ ma w obu nieskończonościach granice niewłaściwe, więc może mieć tam ewentualnie asymptoty ukośne. Z prostych rachunków wynika jednak, że funkcja $f$ nie ma asymptot ukośnych w $-\infty$ ani w $\infty$.
V. Zbadamy teraz pierwszą pochodną funkcji $f$. Mamy $D_{f'} = \boldsymbol{R}$ oraz $f'(x) = 3x^2 - 6x$. Korzystając z warunku koniecznego szukamy punktów, w których funkcja $f$ może mieć ekstrema. Mamy

$$f'(x) = 0 \iff 3\left(x^2 - 2x\right) = 0 \iff x = 0 \text{ lub } x = 2.$$

Przy pomocy pochodnej ustalimy przedziały monotoniczności rozważanej funkcji. Mamy

$$f'(x) > 0 \iff 3x(x-2) > 0 \iff x < 0 \text{ lub } x > 2.$$

Zatem funkcja $f$ jest rosnąca na przedziałach $(-\infty, 0)$, $(2, \infty)$. Podobnie,

$$f'(x) < 0 \iff 0 < x < 2.$$

Funkcja $f$ jest zatem malejąca na przedziale $(0, 2)$. Z powyższych rozważań wynika, że funkcja $f$ ma w punkcie $x = 0$ maksimum lokalne właściwe równe 4, a w punkcie $x = 2$ minimum lokalne właściwe równe 0.
VI. Przechodzimy obecnie do badania drugiej pochodnej. Mamy $D_{f''} = \boldsymbol{R}$ oraz $f''(x) = 6x - 6$. Z warunku koniecznego szukamy punktów, w których funkcja $f$ może mieć punkty przegięcia. Mamy

$$f''(x) = 0 \iff 6(x-1) = 0 \iff x = 1.$$

Przy pomocy drugiej pochodnej ustalimy przedziały wypukłości rozważanej funkcji. Mamy

$$f''(x) > 0 \iff 6(x-1) > 0 \iff x > 1.$$

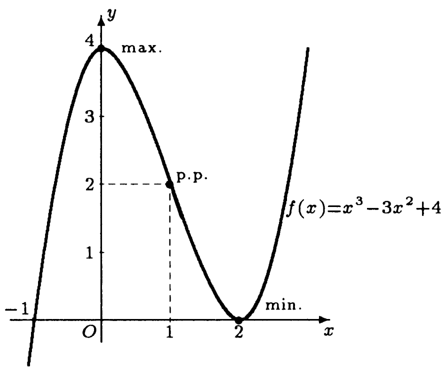
Funkcja $f$ jest zatem ściśle wypukła na przedziale $(1, \infty)$. Ponadto,

$$f''(x) < 0 \iff x < 1.$$

Funkcja $f$ jest zatem ściśle wklęsła na przedziale $(-\infty, 1)$. Z powyższych rozważań wynika, że punkt $(1, 2)$ jest punktem przegięcia wykresu badanej funkcji.
VII. Wyniki uzyskane w punktach I-VI zestawiamy w tabeli:

| $x$ | $-\infty$ | $-\infty<x<0$ | 0 | $0<x<1$ | 1 | $1<x<2$ | 2 | $2<x<\infty$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-\infty$ | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ | $\infty$ |
| $f'(x)$ | $\infty$ | $+$ | 0 | $-$ | $-3$ | $-$ | 0 | $+$ | $\infty$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | 4 | $\searrow$ | 2 | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ | $\infty$ |
| | | | max. | | p.p. | | min. | | |

VIII. Na podstawie tabeli sporządzamy wykres funkcji.



b) I. Dziedziną funkcji $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ jest przedział $(0, \infty)$.
II. Funkcja $g$ jest ciągła w swojej dziedzinie, bo jest ilorazem funkcji ciągłych. Miejscem zerowym funkcji jest $x = 1$.
III. Obliczamy granice funkcji $g$ na „krańcach" jej dziedziny. Mamy

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{x} = \frac{-\infty}{0+} = -\infty \text{ oraz } \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \boxed{\frac{\infty}{\infty}} \overset{H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

IV. Na podstawie wartości powyższych granic stwierdzamy, że prosta $x = 0$ jest asymptotą pionową prawostronną funkcji $g$, a prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą tej funkcji w $\infty$.
V. Zbadamy teraz pierwszą pochodną funkcji $g$. Mamy $D_{g'} = (0, \infty)$ oraz

$$g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Korzystając z warunku koniecznego szukamy punktów, w których funkcja $g$ może mieć ekstrema. Mamy

$$g'(x) = 0 \iff \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \iff x = e.$$

Przy pomocy pochodnej ustalimy teraz przedziały monotoniczności rozważanej funkcji. Mamy

$$g'(x) > 0 \iff \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0 \iff 1 - \ln x > 0 \iff 0 < x < e.$$

Funkcja $g$ jest zatem rosnąca na przedziale $(0, e)$. Podobnie,

$$g'(x) < 0 \iff x > e.$$

Funkcja $g$ jest zatem malejąca na przedziale $(e, \infty)$. Z powyższych rozważań wynika, że funkcja $g$ ma w punkcie $x = e$ maksimum lokalne właściwe równe $e^{-1}$.
VI. Przechodzimy teraz do badania drugiej pochodnej. Mamy $D_{g''} = (0, \infty)$ oraz

$$g''(x) = \frac{2\ln x - 3}{x^3}.$$

Z warunku koniecznego szukamy punktów, w których funkcja $g$ może mieć punkty przegięcia. Mamy

$$g''(x) = 0 \iff \frac{2\ln x - 3}{x^3} = 0 \iff 2\ln x - 3 = 0 \iff x = e^{\frac{3}{2}}.$$

Przy pomocy drugiej pochodnej ustalimy przedziały wypukłości rozważanej funkcji. Mamy

$$g''(x) > 0 \iff \frac{2\ln x - 3}{x^3} > 0 \iff 2\ln x - 3 > 0 \iff x > e^{\frac{3}{2}}.$$

Funkcja $g$ jest zatem ściśle wypukła na przedziale $\left(e^{\frac{3}{2}}, \infty\right)$. Ponadto

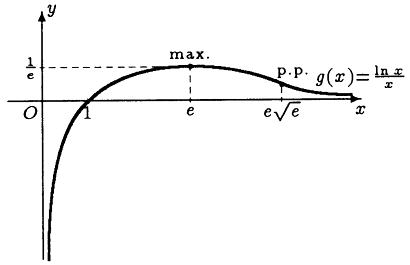
$$g''(x) < 0 \iff 0 < x < e^{\frac{3}{2}}.$$

Badana funkcja jest zatem ściśle wklęsła na przedziale $\left(0, e^{\frac{3}{2}}\right)$. Z powyższych rozważań wynika, że punkt $\left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$ jest punktem przegięcia wykresu funkcji $g$.

VII. Wyniki uzyskane w punktach I-VI zestawiamy w tabeli:

| $x$ | $0$ | $0<x<e$ | $e$ | $e<x<e^{\frac{3}{2}}$ | $e^{\frac{3}{2}}$ | $e^{\frac{3}{2}}<x<\infty$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g''(x)$ | $-\infty$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ |
| $g'(x)$ | $\infty$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-\frac{1}{2}e^{-3}$ | $-$ | $0$ |
| $g(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $e^{-1}$ | ↘ | $\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}$ | ↘ | $0$ |
| | | | max. | | p.p. | | |

VIII. Na podstawie tabeli sporządzamy wykres funkcji $g$.




c) I. Dziedziną funkcji $h(x) = e^{-x^2}$ jest $\boldsymbol{R}$.
II. Funkcja $h$ jest parzysta i ciągła na $\boldsymbol{R}$. Funkcja $h$ nie ma miejsc zerowych i nie jest okresowa.
III. Obliczamy granice funkcji $h$ na „krańcach" jej dziedziny. Mamy $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x^2} = e^{-\infty} = 0$. Z parzystości funkcji $h$ wynika, że także $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x^2} = 0$.
IV. Z wartości powyższych granic wynika, że prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą tej funkcji w obu nieskończonościach.
V. Zbadamy teraz pierwszą pochodną funkcji $h$. Mamy $D_{h'} = \boldsymbol{R}$ oraz $h'(x) = -2xe^{-x^2}$. Korzystając z warunku koniecznego szukamy punktów, w których funkcja $h$ może mieć ekstrema. Mamy

$$h'(x) = 0 \iff -2xe^{-x^2} = 0 \iff x = 0.$$

Przy pomocy pochodnej ustalimy teraz przedziały monotoniczności funkcji $h$. Mamy

$$h'(x) > 0 \iff -2xe^{-x^2} > 0 \iff x < 0.$$

Funkcja $h$ jest zatem rosnąca na przedziale $(-\infty, 0)$. Z parzystości funkcji $h$ wynika zatem, że jest ona malejąca na przedziale $(0, \infty)$. Z warunku wystarczającego wynika, że funkcja $h$ ma w punkcie $x = 0$ maksimum lokalne właściwe równe 1.
VI. Przechodzimy teraz do badania drugiej pochodnej. Mamy $D_{h''} = \boldsymbol{R}$ oraz $h''(x) = 2\left(2x^2 - 1\right)e^{-x^2}$. Z warunku koniecznego szukamy punktów przegięcia wykresu funkcji $h$. Mamy

$$h''(x) = 0 \iff 4\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2} = 0 \iff x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ lub } x = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Przy pomocy drugiej pochodnej ustalimy przedziały wypukłości rozważanej funkcji. Mamy

$$\begin{aligned} h''(x) > 0 &\iff 4\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2} > 0 \\ &\iff \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0 \\ &\iff x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ lub } x > \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Funkcja $h$ jest zatem ściśle wypukła na przedziałach $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$. Ponadto

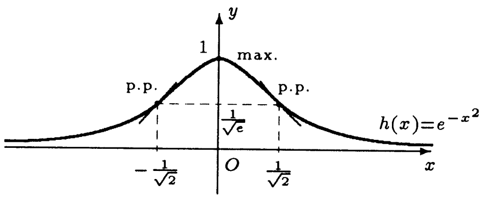
$$h''(x) < 0 \iff -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Zatem badana funkcja jest ściśle wklęsła na przedziale $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Z rozważań tych wynika, że punkty $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ są punktami przegięcia wykresu funkcji $h$.

VII. Wyniki uzyskane w punktach I-VI zestawiamy w tabeli:

| $x$ | $-\infty$ | $-\infty<x<-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<0$ | 0 | $0<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\infty$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h''(x)$ | 0 | + | 0 | − | − | − | 0 | + | 0 |
| $h'(x)$ | 0 | + | $\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}$ | + | 0 | − | $-\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}$ | − | 0 |
| $h(x)$ | 0 | $\nearrow$ | $e^{-\frac{1}{2}}$ | $\nearrow$ | 1 | $\searrow$ | $e^{-\frac{1}{2}}$ | $\searrow$ | 0 |
| | | | p.p. | | max. | | p.p. | | |

VIII. Na podstawie tabeli sporządzamy wykres funkcji.




d) I. Dziedziną funkcji $p(x) = \frac{x}{1-x^2}$ jest zbiór $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$.

II. Funkcja ta jest ciągła na swojej dziedzinie i ma miejsce zerowe tylko w punkcie $x = 0$.

III. Obliczamy granice funkcji $p$ na „krańcach" jej dziedziny. Mamy

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{1-x^2} = \frac{1}{0^+} = \infty; \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{1-x^2} = \frac{1}{0^-} = -\infty; \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1-x^2} = 0.$$

Z nieparzystości funkcji $k$ wynika, że

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x}{1-x^2} = \infty; \quad \lim_{x\to -1^+} \frac{x}{1-x^2} = -\infty; \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{1-x^2} = 0.$$

IV. Z poprzedniego punktu wynika zatem, że proste $x = -1$, $x = 1$ są asymptotami pionowymi obustronnymi tej funkcji oraz, że prosta $y = 0$ jest jej asymptotą poziomą w obu nieskończonościach.

V. Zbadamy teraz pierwszą pochodną funkcji $p$. Mamy $D_{p'} = D_p$ oraz

$$p'(x) = \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}.$$

Funkcja $p$ nie ma ekstremów lokalnych, bo

$$p'(x) = \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2} \neq 0, \text{ dla } x \in D_p$$

Funkcja $p$ jest rosnąca na każdym z przedziałów dziedziny, bo

$$p'(x) = \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2} > 0 \text{ dla } |x| \neq 1.$$

VI. Przechodzimy teraz do badania drugiej pochodnej. Mamy $D_{p''} = D_p$ oraz

$$p''(x) = \frac{2x\left(x^2+3\right)}{(1-x^2)^3}.$$

Z warunku koniecznego szukamy punktów przegięcia wykresu funkcji $p$. Mamy

$$p''(x) = 0 \iff \frac{2x\left(x^2+3\right)}{(1-x^2)^3} = 0 \iff x = 0.$$

Przy pomocy drugiej pochodnej ustalimy przedziały wypukłości rozważanej funkcji. Mamy

$$p''(x) > 0 \iff x < -1 \text{ lub } 0 < x < 1.$$

Funkcja jest zatem ściśle wypukła na przedziałach $(-\infty, -1)$, $(0, 1)$. Z nieparzystości tej funkcji wynika, że jest ona ściśle wklęsła na przedziałach $(-1, 0)$, $(1, \infty)$. Z rozważań tych wynika dalej, że jedynie punkt $(0, 0)$ jest punktem przegięcia wykresu funkcji $p$. W punktach $x = -1$, $x = 1$ funkcja wprawdzie zmienia rodzaj wypukłości, ale punkty te nie należą do dziedziny funkcji.

VII. Wyniki uzyskane w punktach I-VI zestawiamy w tabeli:

| $x$ | $-\infty$ | $-\infty < x < -1$ | $-1_-$ | $-1_+$ | $-1 < x < 0$ | $0$ | $0 < x < 1$ | $1_-$ | $1_+$ | $1 < x < \infty$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p''(x)$ | 0 | + | | | − | 0 | + | | | − | 0 |
| $p'(x)$ | 0 | + | | | + | 1 | + | | | + | 0 |
| $p(x)$ | 0 | ↗ | $\infty$ | $-\infty$ | ↗ | 0 | ↗ | $\infty$ | $-\infty$ | ↗ | 0 |
| | | | | | | p.p. | | | | | |

VIII. Na podstawie tabeli sporządzamy wykres funkcji.