Rozdział 14

Równania pierwszego rzędu i metoda charakterystyk

Rozważmy równanie różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu

$$F(x, u(x), Du(x)) = 0 \quad \text{dla } x \in \Omega, \tag{14.1}$$

gdzie

$$F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \text{jest zadaną funkcja gładką.}$$

O zbiorze Ω będziemy zakładać, że jest otwartym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^n$ i ma gładki brzeg. Niewiadomą w tym równaniu jest funkcja $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Równanie to uzupełniamy warunkiem brzegowym, zadając wartości funkcji u na brzegu zbioru Ω, bądź na jego kawałku:

$$u(x) = g(x) \quad \text{dla } x \in \Gamma \subseteq \partial\Omega. \tag{14.2}$$

Zajmiemy się metodą rozwiązywania tego typu równań, zwaną *metodą charakterystyk*. Opiera się ona na pomyśle, aby wyznaczyć wartość funkcji u w punkcie $x \in \Omega$, znajdując w zbiorze Ω krzywą γ, która łączy punkt x z pewnym punktem na brzegu $x_0 \in \Gamma$ (gdzie wartości funkcji są już określone) i która ma tę własność, że wiemy, jak obliczać wartości funkcji u w punktach tej krzywej. Krzywą tę wyznaczamy, sprowadzając równanie (14.1) do odpowiedniego układu równań różniczkowych zwyczajnych. W ten sposób powierzchnia całkowa równania, czyli wykres funkcji u, zostaje jakby utkana z nitek, tzn. z wartości funkcji u na poszczególnych krzywych γ.

Dobrym źródłem informacji o metodzie charakterystyk jest książka Evansa [8].

Spróbujmy popatrzeć najpierw na pewien prosty przykład.

Załóżmy, że funkcja F w równaniu (14.1) jest liniowa względem trzeciej zmiennej i jednorodna oraz nie zależy od zmiennej z, tzn. jest postaci

$$F(x, z, p) = a(x) \cdot p,$$

gdzie

$$a : \Omega \to \mathbb{R}^n \quad \text{jest ustaloną funkcją gładką,}$$

a kropka (tu i dalej) oznacza standardowy iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$. Równanie (14.1) przyjmuje wówczas postać

$$a(x) \cdot Du(x) = a_1(x)u_{x_1}(x) + \ldots + a_n(x)u_{x_n}(x) = 0. \tag{14.3}$$

Oznacza to, że wektor gradientu $Du(x)$ jest w każdym punkcie $x \in \Omega$ prostopadły do zadanego wektora $a(x)$. Gradient $Du(x)$ jest w punkcie x prostopadły do poziomicy funkcji u, zatem wektor $a(x)$ musi być w tym punkcie do niej styczny. Stąd wynika, że trajektorie pola wektorowego a leżą na poziomicy funkcji u. Zatem, zamiast wyznaczać bezpośrednio funkcję u, znajdziemy najpierw jej poziomice. Utkamy je z wyliczonych krzywych całkowych pola wektorowego a wypuszczonych z zadanych punktów na brzegu obszaru Ω. W tym celu rozwiążemy układ równań

$$\begin{cases} \dot{x}_1(s) &= a_1(x(s)) \\ \dot{x}_2(s) &= a_2(x(s)) \\ & \vdots \\ \dot{x}_n(s) &= a_n(x(s)) \end{cases}$$

gdzie $x(s)$ jest parametryzacją krzywej całkowej pola a. Układ ten uzupełnimy odpowiednimi warunkami początkowymi (które możemy zadać wykorzystując znajomość wartości brzegowych (14.2) dla funkcji u). Przy założeniu, że funkcje a_i sa klasy C^1 układ ten posiada jednoznaczne rozwiązanie. Wyznaczona w ten sposób krzywa całkowa $x(s)$ pola a leży na poziomicy funkcji u, zatem $u(x(s)) = \text{const.} = u(x(0))$, gdzie $x(0) \in \partial\Omega$. Znajomość parametryzacji krzywej $x(s)$ oraz wartości funkcji na tej krzywej pozwala na wyznaczenie wzoru funkcji u, bądź określenie jej w postaci uwikłanej. Krzywą $x(s)$ nazywamy *charakterystyką* lub *krzywą charakterystyczną* równania (14.3), stąd nazwa metody.

Zajmiemy się teraz problemem jak, dla dowolnej funkcji F, wyznaczać krzywe charakterystyczne, czyli inaczej — jak sprowadzać równanie (14.1) do odpowiedniego układu równań zwyczajnych.

14.1 Układ charakterystyczny

Załóżmy, że funkcja u będąca rozwiązaniem zagadnienia (14.1)-(14.2) jest klasy $C^2(\Omega)$. Przyjmijmy, że krzywa γ opisana jest parametryzacją

$$x(s) = (x_1(s), \ldots, x_n(s))$$

dla s z pewnego odcinka prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$. Niech funkcja z opisuje wartości funkcji u na tej krzywej, tzn.

$$z(s) = u(x(s)),$$

a funkcja $p(s) = (p_1(s), \ldots, p_n(s))$ — wartości gradientu funkcji u na tej krzywej, tzn.

$$p(s) = Du(x(s)), \quad \text{gdzie}$$
$$p_i(s) = u_{x_i}(x(s)) \quad \text{dla } i = 1, \ldots, n.$$

Pochodne funkcji x, z, p względem parametru s będziemy oznaczać $\dot{x}$, $\dot{z}$ $\dot{p}$.

Funkcja F jest funkcją $2n+1$ argumentów. Odpowiednie składowe jej gradientu oznaczymy przez F_x, F_z, F_p. Ściślej mówiąc,

$$\begin{aligned} F_x(x,z,p) &= D_xF(x,z,p) = (F_{x_1}(x,z,p),\dots,F_{x_n}(x,z,p)) \\ F_z(x,z,p) &= D_zF(x,z,p) \\ F_p(x,z,p) &= D_pF(x,z,p) = (F_{p_1}(x,z,p),\dots,F_{p_n}(x,z,p)). \end{aligned}$$

Różniczkując funkcje z oraz p względem parametru s otrzymujemy

$$\dot{z}(s) = Du(x(s))\cdot\dot{x}(s) = p(s)\cdot\dot{x}(s) \tag{14.4}$$

oraz

$$\dot{p}_i(s) = D_x(u_{x_i})(x(s))\cdot\dot{x}(s) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_i}(x(s))\,\dot{x}_j(s) \tag{14.5}$$

dla $i=1,\dots,n$. Zauważmy, że w ostatnim równaniu pojawiają się drugie pochodne funkcji u. Zróżniczkujmy także wyjściowe równanie (14.1) względem x. Otrzymamy

$$F_{x_i}(x,u,Du) + F_z(x,u,Du)\,u_{x_i}(x) + \sum_{j=1}^{n}F_{p_j}(x,u,Du)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(x) = 0 \tag{14.6}$$

dla $i=1,\dots,n$.

Załóżmy teraz, że γ jest krzywą w zbiorze Ω, której parametryzacja $x(s)$ spełnia równanie

$$\dot{x}(s) = F_p(x(s),z(s),p(s)). \tag{14.7}$$

Wówczas równanie (14.4) przyjmuje postać

$$\dot{z}(s) = p(s)\cdot F_p(x(s),z(s),p(s)). \tag{14.8}$$

Równanie (14.5) możemy przekształcić, korzystając z (14.6), (14.7) i z symetrii drugich pochodnych (przypomnijmy, że zakładamy, że u jest klasy C^2!), otrzymując

$$\begin{aligned} \dot{p}_i(s) = &= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_i}(x(s))\,F_{p_j}(x(s),z(s),p(s)) \\ &= -F_{x_i}(x(s),z(s),p(s)) - F_z(x(s),z(s),p(s))\,p_i(x(s)). \end{aligned} \tag{14.9}$$

Łącząc równania (14.7), (14.8), (14.9) otrzymujemy zamknięty układ $2n+1$ równań zwyczajnych postaci

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} &=& F_p \\ \dot{z} &=& p\cdot F_p \\ \dot{p} &=& -F_x - F_z\,p \end{array} \right. \tag{14.10}$$

Dla uproszczenia pominęliśmy w zapisie argumenty funkcji, należy jednak pamiętać, że funkcje x, z, p i ich pochodne zależą od parametru s, zaś argumentem funkcji F jest wektor $(x,z,p)\in\mathbb{R}^{2n+1}$.

Definicja 14.1. Układ (14.10) nazywamy *układem charakterystycznym* równania (14.1).

Pamiętajmy, że układ ten wyprowadzony został przy założeniu, że rozwiązanie równania (14.1) jest klasy $C^2(\Omega)$. Kluczowym pomysłem przy wyprowadzaniu układu charakterystycznego było przyjęcie założenia, że wektor styczny do krzywej γ spełnia równanie (14.7).

Definicja 14.2. Krzywą $x(s)$ otrzymaną jako część rozwiązania układu (14.10) będziemy nazywać *charakterystyką* bądź też *krzywą charakterystyczną* równania (14.1), tzn. równania

$$F(x, u(x), Du(x)) = 0.$$

Pełne rozwiązanie układu (14.10), to znaczy krzywą $(x(s), z(s), p(s))$ położoną w przestrzeni $\mathbb{R}^{2n+1}$, będziemy nazywać *wstęgą charakterystyczną* równania (14.1).

Uwaga terminologiczna. W niektórych źródłach, np. w podręczniku Evansa [8], termin *charakterystyka* ma nieco inne znaczenie: odnosi się do pełnego rozwiązania układu (14.10), czyli do krzywej całkowej $(x(s), z(s), p(s))$ położonej w przestrzeni $\mathbb{R}^{2n+1}$, zaś samą krzywą $x(s)$ w zbiorze Ω określa się jako *zrzutowaną charakterystykę* na przestrzeń zmiennych niezależnych $\mathbb{R}^n$.

W niektórych przypadkach szczególnych układ charakterystyczny (14.10) ma prostą formę. Dzieje sie tak np. wtedy, gdy funkcja F, definiująca równanie (14.1) jest liniowa względem zmiennej p.

Przykład 14.1 (Funkcja F jest liniowa[1])**.** Załóżmy, że funkcja F jest funkcją liniową drugiej i trzeciej zmiennej, tzn. F jest postaci

$$F(x, z, p) = a(x)\, z + b(x) \cdot p + c(x),$$

gdzie $a : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $b : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ oraz $c : \Omega \to \mathbb{R}$ są zadanymi funkcjami gładkimi. Równanie (14.1) przyjmuje wówczas postać

$$b_1(x)\, u_{x_1}(x) + \ldots + b_n(x)\, u_{x_n}(x) + a(x)\, u(x) + c(x) = 0 \quad \text{dla } x \in \Omega. \tag{14.11}$$

Wypisując pierwsze $n + 1$ równań układu charakterystycznego otrzymujemy

$$\begin{cases} \dot{x}(s) &= b(x(s)) \\ \dot{z}(s) &= b(x(s)) \cdot p(s) \\ &= -a(x(s))\, z(s) - c(x(s)) \quad \text{z równania (14.11).} \end{cases} \tag{14.12}$$

Dostaliśmy układ zamknięty; nie trzeba wypisywać dodatkowego równania na p. Do wyznaczenia krzywej charakterystycznej wystarczy rozwiązać uproszczony układ charakterystyczny (14.12).

[1]Jest tu pewna nieścisłość terminologiczna – w zasadzie funkcja postaci $f(z, p) = az + bp + c$ jest funkcją liniową tylko dla $c = 0$, a dla $c \neq 0$ jest funkcją afiniczną, ale utarło się (szczególnie w praktyce szkolnej) mieszać te dwa pojęcia i nazywać funkcje afiniczne liniowymi.

Przykład 14.2. Załóżmy teraz, że F jest funkcją liniową tylko względem zmiennej oznaczającej pochodną Du, tzn. F jest postaci

$$F(x,z,p) = a(x,z) \cdot p + c(x,z),$$

gdzie $a : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ oraz $c : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są zadanymi funkcjami gładkimi. Równanie (14.1) przyjmuje postać

$$a_1(x,u)\, u_{x_1}(x) + \ldots + a_n(x,u)\, u_{x_n}(x) + c(x,u) = 0 \quad \text{dla } x \in \Omega. \tag{14.13}$$

Wypisując podobnie jak poprzednio pierwsze $n+1$ równań układu charakterystycznego otrzymujemy

$$\begin{cases} \dot{x}(s) &= a(x(s), z(s)), \\ \dot{z}(s) &= a(x(s), z(s)) \cdot p(s) \\ &= -c(x(s), z(s)) \quad \text{z równania (14.13).} \end{cases} \tag{14.14}$$

Ponownie dostajemy układ zamknięty bez konieczności wypisywania równania na p. Zatem również w przypadku, gdy funkcja F jest liniowa tylko względem zmiennej p do wyznaczenia krzywej charakterystycznej wystarczy uproszczony układ charakterystyczny (14.14).

14.2 Dopuszczalność warunków początkowych

Aby układ (14.10) miał jednoznaczne rozwiązanie, trzeba go uzupełnić odpowiednimi warunkami początkowymi.

W dalszej części wykładu będziemy dla uproszczenia zakładać, że brzeg Γ zbioru Ω w pobliżu punktu $x_0 \in \Gamma$ jest zawarty w hiperpłaszczyźnie $\{x_n = 0\}$, a zbiór Ω zawarty jest w półprzestrzeni $\{x \in \mathbb{R}^n \colon x_n > 0\}$. Taką sytuację można uzyskać przekształcając dyfeomorficznie obszar Ω i wyjściowe zagadnienie w otoczeniu punktu x_0.

Niech punkt x_0 będzie dowolnym punktem na hiperpowierzchni Γ, na której zadany jest warunek brzegowy (14.2). Układ (14.10) chcemy uzupełnić o warunki początkowe

$$x(0) = x_0,$$
$$z(0) = z_0,$$
$$p(0) = p_0.$$

Wartości brzegowe funkcji u na Γ zadane są funkcją g, przyjmujemy więc

$$z(0) = z_0 = g(x_0). \tag{14.15}$$

Pojawia się natomiast problem jak określić punkt początkowy p_0, skoro warunek brzegowy (14.2) nic nie mówi o wartości gradientu funkcji u.

Zauważmy, że skoro przyjęliśmy założenie, że $\Gamma \subseteq \{x_n = 0\}$, to warunek brzegowy (14.2) możemy zapisać w postaci

$$u(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = g(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0).$$

Różniczkując u względem x_i (w kierunkach stycznych do Γ) otrzymujemy

$$u_{x_i}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = g_{x_i}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \quad \text{dla } i = 1, \dots, n-1.$$

Kładziemy zatem

$$p_i(0) = g_{x_i}(x_0) \quad \text{dla } i = 1, \dots, n-1. \tag{14.16}$$

Otrzymaliśmy $(n-1)$ warunków określających pierwsze $(n-1)$ współrzędnych wektora $p(0)$. Potrzebujemy jeszcze jednego warunku pozwalającego określić ostatnią współrzędną. W tym celu skorzystamy z równania (14.1). Wstawiając do niego wartości $x(0)$, $z(0)$ oraz $p_i(0)$ dla $i = 1, \dots, n-1$ otrzymujemy równanie

$$F(x_0, g(x_0), g_{x_1}(x_0), \dots, g_{x_{n-1}}(x_0), p_n(0)) = 0, \tag{14.17}$$

w którym jedyną niewiadomą jest $p_n(0)$ i w ten sposób otrzymujemy ostatnie, n-te równanie określające warunek początkowy dla funkcji $p(s)$.

Zauważmy, że równanie (14.17) jest w ogólności równaniem nieliniowym, co oznacza, że wektor p_0 spełniający warunki (14.16) oraz (14.17) może w ogóle nie istnieć, albo nie być jednoznacznie wyznaczony.

Równania (14.15), (14.16), (14.17) będziemy nazywać *warunkami zgodności*.

Definicja 14.3. Mówimy, że wektor danych początkowych $(x_0, z_0, p_0) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ jest *dopuszczalny* dla układu charakterystycznego (14.10) związanego z zagadnieniem brzegowym (14.1)–(14.2), tzn. zagadnieniem

$$\begin{aligned} F(x, u, Du) &= 0 \quad \text{na } \Omega, \\ u &= g \quad \text{na } \Gamma \subseteq \partial\Omega, \end{aligned}$$

jeśli $x_0 \in \Gamma$ oraz spełnione są warunki zgodności (14.15), (14.16), (14.17), tzn.

$$\begin{aligned} z_0 &= g(x_0), \\ p_0 &= (g_{x_1}(x_0), \dots, g_{x_{n-1}}(x_0), p_n(0)), \\ F(x_0, z_0, p_0) &= 0. \end{aligned}$$

14.3 Niecharakterystyczność danych początkowych

Wiemy już jakimi warunkami początkowymi należy uzupełnić układ charakterystyczny (14.10), aby wyznaczyć charakterystykę $x(s)$ przecinającą Γ w punkcie x_0 oraz wartości funkcji u na charakterystyce. Aby rozwiązać zagadnienie (14.1)–(14.2) lokalnie w otoczeniu punktu $x_0 \in \Gamma$, musimy jednak umieć rozwiązać układ charakterystyczny dla warunków początkowych leżących blisko x_0. Inaczej mówiąc, trzeba sprawdzić, czy małe zaburzenie wektora (x_0, z_0, p_0) zachowuje warunki zgodności.

Prawdziwy jest następujący lemat:

Lemat 14.1. *Załóżmy, że wektor danych początkowych* (x_0, z_0, p_0) *jest dopuszczalny oraz, że pochodna cząstkowa funkcji* F *względem ostatniej zmiennej wektora* $p \in \mathbb{R}^n$ *jest różna od zera w punkcie* (x_0, z_0, p_0)*, tzn.*

$$F_{p_n}(x_0, z_0, p_0) \neq 0.$$

Istnieje wówczas otoczenie U *punktu* $x_0 \in \Gamma$ *o tej własności, że dla dowolnego punktu* $y = (y_1, \ldots, y_{n-1}, 0) \in U \cap \Gamma$ *układ* n *równań dla niewiadomych* $b_1, \ldots, b_n$

$$\begin{cases} b_1 &= g_{x_1}(y) \\ &\vdots \\ b_{n-1} &= g_{x_{n-1}}(y) \\ F(y, g(y), b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n) &= 0 \end{cases}$$

ma jednoznaczne rozwiązanie.

Na mocy powyższego możemy zdefiniować funkcję

$$q : U \cap \Gamma \to \mathbb{R}^n$$
$$q_i(y) = b_i \quad \text{dla } i = 1, \ldots, n,$$

która ma tę własność, że $q(x_0) = p_0$ i która pozwala nam “produkować” dopuszczalne dane początkowe dla układu (14.10) w pewnym otoczeniu punktu x_0. W związku z tym wprowadzamy następującą definicję.

Definicja 14.4. Powiemy, że wektor danych początkowych $(x_0, z_0, p_0) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ jest *niecharakterystyczny*, jeśli spełniony jest warunek

$$F_{p_n}(x_0, z_0, p_0) \neq 0, \tag{14.18}$$

gdzie F jest funkcją definiującą równanie (14.1).

Uwaga 14.1. W przypadku ogólnym, gdy brzeg Γ nie jest płaski w otoczeniu x_0, tzn. nie jest zawarty w hiperpłaszczyźnie $\{x_n = 0\}$, warunek niecharakterystyczności danych początkowych przyjmuje postać

$$D_p F(x_0, z_0, p_0) \cdot \nu(x_0) \neq 0,$$

gdzie $\nu(x_0)$ oznacza wektor normalny zewnętrzny do brzegu $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ w punkcie x_0.

14.4 Rozwiązania lokalne

Przejdziemy teraz do zasadniczego celu naszych rozważań, tj. do konstrukcji (lokalnego) rozwiązania zagadnienia (14.1)–(14.2). Lokalność oznacza, że chcemy znaleźć rozwiązanie przynajmniej w pobliżu brzegu Γ, niekoniecznie w całym zbiorze Ω.

Załóżmy, że wektor danych początkowych $(x_0, z_0, p_0) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ jest dopuszczalny i niecharakterystyczny. Zgodnie z lematem 14.1 istnieje funkcja $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ taka, że $p_0 = q(x_0)$, a ponadto wektor $(\alpha, g(\alpha), q(\alpha))$ dla wszystkich wartości α z pewnego otoczenia punktu x_0 na Γ określa dane dopuszczalne. Dla każdego takiego punktu $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, 0)$ rozwiązujemy układ charakterystyczny (14.10)

$$\begin{cases} \dot{x} &= F_p \\ \dot{z} &= p \cdot F_p \\ \dot{p} &= -F_x - F_z\, p \end{cases}$$

z warunkami początkowymi

$$\begin{aligned} x(0) &= \alpha, \\ z(0) &= g(\alpha), \\ p(0) &= q(\alpha), \end{aligned} \tag{14.19}$$

otrzymując wstęgę charakterystyczną, czyli krzywą $(x(s), z(s), p(s))$ w przestrzeni $\mathbb{R}^{2n+1}$. Zależy ona oczywiście od punktu początkowego. Aby zaznaczyć tę zależność, będziemy czasem uwzględniać parametr α jako argument, zapisując pełne rozwiązanie układu jako

$$(x(\alpha, s), z(\alpha, s), p(\alpha, s)).$$

Przypomnijmy, że dla uproszczenia założyliśmy, że $\Gamma \subset \{x \in \mathbb{R}^n \colon x_n = 0\}$, a $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n \colon x_n > 0\}$. Prawdziwy jest następujący lemat:

Lemat 14.2. *Załóżmy, że (x_0, z_0, p_0) jest wektorem dopuszczalnych i niecharakterystycznych danych początkowych. Istnieją wówczas: przedział otwarty $I \subset \mathbb{R}$ zawierający zero, otoczenie $W \subseteq \Gamma \subset \mathbb{R}^{n-1}$ punktu x_0 oraz otoczenie $V \subset \mathbb{R}^n$ punktu x_0, o tej własności, że dla każdego $y \in V$ istnieje dokładnie jedna para $(\alpha, s) \in W \times I$ spełniająca warunek*

$$y = x(\alpha, s),$$

gdzie $x(\alpha, \cdot)$ oznacza charakterystykę startującą z punktu $\alpha \in W$. Ponadto odwzorowania

$$\begin{aligned} y &\mapsto s(y) \\ y &\mapsto \alpha(y) \end{aligned}$$

są klasy C^2.

Skoro na mocy powyższego lematu przez każdy punkt $x \in V$ przechodzi dokładnie jedna charakterystyka startująca z pewnego punktu $\alpha \in W$, możemy zdefiniować funkcję u, kładąc

$$u(x) = z(\alpha(x), s(x)), \tag{14.20}$$

gdzie $\alpha(x) \in W$ oraz $s(x) \in I$ są takie jak w lemacie 14.2, a funkcja $z(\alpha, s)$ jest częścią rozwiązania układu charakterystycznego (14.10) z warunkami (14.19).

Twierdzenie 14.1. *Załóżmy, że* (x_0, z_0, p_0) *jest wektorem dopuszczalnych i niecharakterystycznych danych początkowych. Funkcja* u *zdefiniowana wzorem* (14.20) *jest klasy* C^2 *i spełnia równanie różniczkowe cząstkowe*

$$F(x, u(x), Du(x)) = 0 \quad \textit{dla } x \in V \subset \Omega$$

z warunkiem brzegowym

$$u(x_0) = g(x_0) \quad \textit{dla } x_0 \in W \subset \Gamma,$$

gdzie zbiory W *i* V *są takie jak w lemacie 14.2.*

Zauważmy, że twierdzenie to mówi o istnieniu rozwiązań *lokalnych*, tzn. takich, które są określone w pewnym (być może małym) otoczeniu tych punktów brzegowych, które generują dopuszczalne i niecharakterystyczne dane początkowe dla układu charakterystycznego. Aby znaleźć odpowiedź na pytanie o istnienie rozwiązania w całym zbiorze Ω, trzeba badać innymi metodami przedłużalność otrzymanych rozwiązań lokalnych.

Problem rozwiązania układu charakterystycznego bywa poważnym wyzwaniem. W przypadkach szczególnych, np. gdy F jest funkcją liniową, jest to zadanie dość proste. Jednak w ogólnym przypadku znalezienie rozwiązania może wymagać użycia metod numerycznych. W dalszej części rozwiążemy kilka przykładów, a później zobaczymy, jak metoda charakterystyk działa w praktyce.

14.5 Przykłady

Dla ułatwienia śledzenia rozwiązań przypominamy ogólną postać układu charakterystycznego:

$$\begin{cases} \dot{x} &= F_p, \\ \dot{z} &= p \cdot F_p, \\ \dot{p} &= -F_x - F_z\, p. \end{cases}$$

Pierwsze cztery przykłady dotyczą równania quasiliniowego, tzn. takiego, w którym funkcja F jest funkcją liniową zmiennej p. Jest to sytuacja, gdy układ charakterystyczny ma prostszą postać — do jego zamknięcia nie potrzeba wypisywać równania na $\dot{p}$. Niemniej, nawet w takiej sytuacji sformułowane wyżej twierdzenie mówi o istnieniu rozwiązań lokalnych. Otrzymawszy zatem rozwiązanie, trzeba zawsze zbadać na jakim obszarze jest ono dobrze określone.

Zadanie 14.1. Znaleźć rozwiązanie równania

$$x\, u_x + y\, u_y = 2 \quad \text{w zbiorze } \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}, \tag{14.21}$$

spełniające warunek

$$u(1, y) = 3y^2. \tag{14.22}$$

Rozwiązanie. To zagadnienie nie jest ściśle rzecz biorąc zagadnieniem brzegowym, gdyż prosta $(1, y) \in \mathbb{R}^2$ nie stanowi brzegu obszaru Ω. Możemy jednak rozważyć obszary $\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1\}$ oraz $\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1)\}$. Wtedy warunek (14.22) zadany jest na całym brzegu obszaru Ω_1 oraz na kawałku Γ brzegu obszaru Ω_2.

Załóżmy, że $(x, y) \in \Omega_1$. Funkcja F definiująca równanie (14.21) jest postaci

$$F(x, y, z, p) = x\, p_1 + y\, p_2 - 2.$$

Jest to funkcja liniowa względem $p = (p_1, p_2)$, więc układ charakterystyczny nie wymaga równania dla $p(s)$. Przyjmuje on postać

$$\begin{cases} \dot{x}(s) &= x(s), \\ \dot{y}(s) &= y(s), \\ \dot{z}(s) &= x(s)\, p_1(s) + y(s)\, p_2(s) = 2, \end{cases}$$

wraz z warunkiem początkowym

$$\begin{aligned} x(0) &= 1, \\ y(0) &= \alpha, \\ z(0) &= 3\alpha^2. \end{aligned}$$

Parametr α określa położenie punktu początkowego na brzegu obszaru. Rozwiązując ten prosty układ dostajemy

$$\begin{aligned} x(s, \alpha) &= \mathrm{e}^s \\ y(s, \alpha) &= \alpha \mathrm{e}^s \\ z(s, \alpha) &= 2s + 3\alpha^2. \end{aligned}$$

Charakterystyka wypuszczona z punktu $(1, \alpha)$ opisana jest parametryzacją

$$(x(s, \alpha), y(s, \alpha)) = (\mathrm{e}^s, \alpha \mathrm{e}^s).$$

Ponieważ

$$u(x(s, \alpha), y(s, \alpha)) = z(s, \alpha) = 2s + 3\alpha^2,$$

to odwracając parametryzację (jest to możliwe zarówno w obszarze Ω_1 jak i Ω_2) otrzymujemy wzór na funkcję u:

$$u(x, y) = 2 \ln x + 3 \frac{y^2}{x^2} \quad \text{dla } (x, y) \in \Omega_1.$$

Łatwo sprawdzić, że wzór ten określa rozwiązanie także w obszarze Ω_2 i że rozwiązania te sklejają się do funkcji gładkiej na całym obszarze Ω. $\Diamond$

Zadanie 14.2. Znaleźć rozwiązanie zagadnienia brzegowego

$$\begin{aligned} x_1\, u_{x_1} + (x_1 + x_2)\, u_{x_2} + (x_1 + x_3)\, u_{x_3} = x_1 + x_2 + x_3 \quad &\text{dla } (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x_1, x_2, 0) = x_1 - x_2 \qquad &\text{dla } x_1, x_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Rozwiązanie. Funkcja F definiująca równanie jest postaci

$$F(x,z,p) = x_1\,p_1 + (x_1+x_2)\,p_2 + (x_1+x_3)\,p_3 - x_1 - x_2 - x_3.$$

Ponieważ jest ona liniowa względem zmiennej p, układ charakterystyczny upraszcza się do układu

$$\begin{cases} \dot{x}_1(s) &=& x_1(s) \\ \dot{x}_2(s) &=& x_1(s) + x_2(s) \\ \dot{x}_3(s) &=& x_1(s) + x_3(s) \\ \dot{z}(s) &=& x_1(s) + x_2(s) + x_3(s). \end{cases}$$

Korzystając z warunku brzegowego nakładamy warunki początkowe postaci

$$\begin{aligned} x_1(0) &= \alpha, \\ x_2(0) &= \beta, \\ x_3(0) &= 0, \\ z(0) &= \alpha - \beta, \end{aligned}$$

gdzie α, β są dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Rozwiązaniem powyższego układu są funkcje

$$\begin{aligned} x_1(s,\alpha,\beta) &= \alpha \mathrm{e}^s, \\ x_2(s,\alpha,\beta) &= \beta \mathrm{e}^s + \alpha s \mathrm{e}^s, \\ x_3(s,\alpha,\beta) &= \alpha s \mathrm{e}^s, \\ z(s,\alpha,\beta) &= (\beta-\alpha)(\mathrm{e}^s - 2) + 2\alpha s e^s. \end{aligned}$$

Niech $(x_1,x_2,x_3) \in \Omega_1 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$. Szukamy charakterystyki przechodzącej przez ten punkt.

Jeśli $x_1 \neq 0$, to $\alpha \neq 0$ i dostajemy

$$\begin{aligned} s &= \frac{x_3}{x_1} \\ \alpha &= x_1 \mathrm{e}^{-\frac{x_3}{x_1}} \\ \beta &= (x_2 - x_3)\mathrm{e}^{-\frac{x_3}{x_1}}. \end{aligned}$$

Funkcja u zadana jest zatem wzorem

$$u(x_1,x_2,x_3) = (x_2 + x_3 - x_1) + 2(x_1 - x_2 + x_3)\mathrm{e}^{-\frac{x_3}{x_1}} \quad \text{dla } x_1 \neq 0,\ x_2 \in \mathbb{R},\ x_3 \geq 0. \tag{14.23}$$

Jeśli natomiast $x_1 = 0$, to $\alpha = 0$ i dane początkowe są niecharakterystyczne. Mamy bowiem

$$F_{p_3}(x(0), z(0), p(0)) = x_1(0) + x_3(0) = 0.$$

Twierdzenie 14.1 o lokalnym istnieniu rozwiązań nic więc nie mówi o rozwiązaniach przechodzących „nad" prostą $(0,x_2,0) \subset \partial\Omega$.

Otrzymaliśmy zatem dwa kawałki rozwiązania: jeden określony na podzbiorze $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \subset \Omega$ a drugi na podzbiorze $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \subset \Omega$. Zastanówmy się, czy można je skleić do rozwiązania określonego na całym zbiorze Ω.

Niestety, patrząc na wzór funkcji u (14.23) widzimy, że rozwiązania nie da się przedłużyć w sposób ciągły do punktu $(0, x_2, x_3)$, dla $x_3 \neq 0$ — granice jednostronne będą różne, gdy będziemy podchodzić od strony $x_1 > 0$ i $x_1 < 0$. Łatwo jest również sprawdzić, że granica rozwiązania nie będzie istnieć w żadnym punkcie brzegowym postaci $(0, x_2, 0)$.

Znaleźliśmy w ten sposób rozwiązanie wyjściowego równania, ale w zbiorze

$$\Omega_1 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,$$

z warunkiem brzegowym określonym na części brzegu:

$$u(x_1, x_2, 0) = x_1 - x_2 \quad \text{na} \quad \Gamma \subset \partial\Omega_1,$$

gdzie

$$\Gamma = \{(x_1, x_2, x_3)\colon x_1 > 0, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 = 0\}$$
$$\partial\Omega_1 = \Gamma \cup \{(x_1, x_2, x_3)\colon x_1 = 0, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \geq 0\}.$$

Analogicznie wykazujemy, że istnieje rozwiązanie zagadnienia zadanego na zbiorze

$$\Omega_2 = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,$$

z warunkiem brzegowym określonym również na kawałku Γ brzegu tego zbioru, gdzie

$$\Gamma = \{(x_1, x_2, x_3)\colon x_1 < 0, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 = 0\}.$$

$\Diamond$

Zadanie 14.3. Znaleźć rozwiązanie zagadnienia

$$u\, u_x - u_y = u - 1 \quad \text{dla } (x, y) \in \Omega = \mathbb{R}^2$$

spełniające warunek

$$u(x, x) = 2x.$$

Rozwiązanie. Wartości funkcji u określone są na prostej $y = x$, która dzieli całą płaszczyznę $\mathbb{R}^2$ na dwie półpłaszczyzny, formalnie rzec biorąc nasze teoretyczne rozważania (i twierdzenia) dotyczą dwóch otwartych obszarów, nie ma to jednak wpływu na procedurę wyznaczania rozwiązania.

Równanie jest postaci $F(x, y, u, Du) = 0$, gdzie

$$F(x, y, z, p) = z\, p_1 - p_2 - z + 1.$$

Przyjmijmy

$$\begin{aligned}
(x, y) &= (x(s), y(s)), \\
z(s) &= u(x(s), y(s)), \\
p(s) &= (u_x(x(s), y(s)), u_y(x(s), y(s)) = (p_1(s), p_2(s)).
\end{aligned}$$

Wypisujemy równania charakterystyk:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(s) &= z(s), \\
\dot{y}(s) &= -1, \\
\dot{z}(s) &= (p_1(s), p_2(s)) \cdot (z, -1) = zp_1 - p_2 = z - 1.
\end{aligned}$$

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, równanie na $p(s)$ nie jest nam potrzebne. Mamy zatem rozwiązać układ

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = z(s) \\ \dot{y}(s) = -1 \\ \dot{z}(s) = z - 1 \end{cases}$$

z odczytanym z warunków brzegowych warunkiem początkowym

$$\begin{cases} \dot{x}(0) = \alpha \\ \dot{y}(0) = \alpha \\ \dot{z}(0) = 2\alpha. \end{cases}$$

Odcałkowując równania otrzymujemy

$$\begin{aligned}
z(s) &= Ae^s + 1, \\
y(s) &= -s + B, \\
x(s) &= Ae^s + s + C,
\end{aligned}$$

co po uwzględnieniu warunków początkowych daje

$$\begin{aligned}
z(s, \alpha) &= (2\alpha - 1)e^s + 1, \\
y(s, \alpha) &= -s + \alpha, \\
x(s, \alpha) &= (2\alpha - 1)e^s + s + 1 - \alpha.
\end{aligned}$$

Ostatecznie

$$u(x, y) = z(x(s, \alpha), y(s, \alpha)) = (2\alpha - 1)e^s + 1 = x + y.$$

$\lozenge$

Zadanie 14.4 (Niejednorodne równanie Burgersa)**.** Znaleźć rozwiązanie zagadnienia brzegowego

$$\begin{aligned}
u_t + u\, u_x = 1 \quad &\text{dla } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\
u(x, 0) = kx \quad &\text{dla } x \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

gdzie $k \in \mathbb{R}$ jest zadanym parametrem.

Rozwiązanie. Funkcja F jest postaci

$$F(x, t, z, p) = p_2 + zp_1 - 1.$$

Wypiszmy układ charakterystyczny

$$\begin{cases} \dot{t}(s) = 1 \\ \dot{x}(s) = z(s) \\ \dot{z}(s) = 1 \end{cases}$$

oraz warunki początkowe

$$\begin{cases} \dot{t}(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = \alpha \\ \dot{z}(0) = k\alpha. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu są funkcje

$$\begin{aligned} t(s, \alpha) &= s, \\ x(s, \alpha) &= \frac{1}{2}s^2 + k\alpha s + \alpha, \\ z(s, \alpha) &= s + k\alpha. \end{aligned}$$

Parametr s równy jest zmiennej t, zaś parametr α łatwo możemy wyznaczyć znając współrzędne punktu (x, t):

$$\alpha = \frac{x - \frac{1}{2}t^2}{kt + 1}.$$

Funkcja u będąca rozwiązaniem naszego zagadnienia jest zatem postaci

$$u(x, t) = t + k\frac{x - \frac{1}{2}t^2}{kt + 1}.$$

Rozwiązanie to zależy oczywiście od parametru k, który jest jedną z danych wyjściowego zagadnienia. Łatwo zauważyć, że dziedzina rozwiązania w istotny sposób zależy od tego parametru.

Charakterystyka startująca z punktu $(\alpha, 0)$ jest opisana parametryzacją

$$\begin{aligned} t(s, \alpha) &= s, \\ x(s, \alpha) &= \frac{1}{2}s^2 + k\alpha s + \alpha. \end{aligned}$$

Dla $k \geq 0$ takie krzywe nie przecinają się w obszarze $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Pozwala to na skonstruowanie rozwiązania, które jest dobrze określone na całej półpłaszczyźnie $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

Dla $k < 0$ charakterystyki przecinają się w punkcie $(\frac{1}{2k^2}, -\frac{1}{k})$: Nie możemy zatem w sposób jednoznaczny odwrócić parametryzacji. Przedział I w Twierdzeniu 14.1 jest równy $(0, -\frac{1}{k})$. Rozwiązanie naszego wyjściowego zagadnienia brzegowego „wybucha” do nieskończoności dochodząc do punktów na prostej $\mathbb{R} \times \{-\frac{1}{k}\}$, nie jest zatem określone na całej półpłaszczyźnie. $\Diamond$

Zadanie 14.5 (Równanie eikonału)**.** Niech $B(0,1)$ oznacza otwarte koło jednostkowe w $\mathbb{R}^2$. Rozwiązać zagadnienie brzegowe

$$\begin{aligned} u_x^2 + u_y^2 = 1 \quad & \text{dla } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus B(0,1) \\ u(x,y) = 0 \quad & \text{dla } x^2+y^2 = 1. \end{aligned}$$

Rozwiązanie. To równanie jest w pełni nieliniowe z funkcją F postaci

$$F(x,y,z,p) = p_1^2 + p_2^2 - 1 \quad \text{dla } p = (p_1,p_2).$$

Wypisując układ charakterystyczny otrzymujemy równania

$$\begin{aligned} \dot{x}(s) &= 2p_1(s), \\ \dot{y}(s) &= 2p_2(s), \\ \dot{z}(s) &= p_1 F_{p_1} + p_2 F_{p_2} = 2p_1^2 + 2p_2^2 = 2, \\ \dot{p}_1(s) &= -F_x - F_z p_1 = 0, \\ \dot{p}_2(s) &= -F_y - F_z p_2 = 0. \end{aligned}$$

Teraz trzeba określić warunki początkowe dla tego układu. Parametryzujemy okrąg jednostkowy długością łuku

$$[0,2\pi) \ni \alpha \mapsto (\cos\alpha, \sin\alpha)$$

i otrzymujemy

$$\begin{aligned} x(0) &= \cos\alpha, \\ y(0) &= \sin\alpha, \\ z(0) &= 0. \end{aligned}$$

Trzeba jeszcze określić warunki początkowe dla p_1, p_2. Przypomnijmy, że

$$p_1(s) = \frac{\partial u}{\partial x}(x(s), y(s)),$$

zatem

$$p_1(0) = \frac{\partial u}{\partial x}(\cos\alpha, \sin\alpha).$$

Różniczkując stronami równanie $u(\cos\alpha, \sin\alpha) = 0$ względem parametru α otrzymujemy

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\cos\alpha, \sin\alpha)(-\sin\alpha) + \frac{\partial u}{\partial x}(\cos\alpha, \sin\alpha)\cos\alpha = 0,$$

czyli

$$-p_1(0)\sin\alpha + p_2(0)\cos\alpha = 0.$$

Z równania wiemy ponadto, że

$$p_1^2(0) + p_2^2(0) = 1.$$

Powyższe warunki określają dwa dopuszczalne zestawy danych początkowych dla wektora p:

$$\begin{cases} p_1(0) &= \cos\alpha \\ p_2(0) &= \sin\alpha \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} p_1(0) &= -\cos\alpha \\ p_2(0) &= -\sin\alpha \end{cases}$$

Sprawdźmy, czy wyznaczone dane początkowe spełniają warunek niecharakterystyczności określony w definicji 14.4. Zauważmy, że parametryzacja okręgu długością łuku odpowiada wprowadzeniu w $\mathbb{R}^2$ współrzędnych biegunowych (α, r). Taki układ współrzędnych powoduje „wyprostowanie” brzegu obszaru Ω — okrąg $\{x^2 + y^2 = 1\}$ zostaje przekształcony na odcinek $\{\alpha \in [0, 2\pi); r = 1\}$. Łatwiej jest jednak pracować w oryginalnym układzie (x, y). Ponieważ brzeg obszaru nie jest wtedy prosty, warunek niecharakterystyczności przyjmuje postać

$$F_p(x(0), y(0), z(0), p(0)) \cdot \nu \neq 0,$$

gdzie $\nu = (n_1, n_2)$ jest wektorem normalnym zewnętrznym do brzegu obszaru Ω w punkcie $(x(0), y(0))$. U nas

$$\begin{aligned} n_1 &= -\cos\alpha \\ n_2 &= -\sin\alpha. \end{aligned}$$

Mamy zatem

$$(2p_1(0), 2p_2(0)) \cdot (n_1, n_2) = -2(\pm\cos\alpha, \pm\sin\alpha) \cdot (\cos\alpha, \sin\alpha) = \mp 2,$$

co oznacza, że oba zestawy danych początkowych są niecharakterystyczne. Będziemy pracować z zestawem danych początkowych

$$\begin{aligned} x(0) &= \cos\alpha, \\ y(0) &= \sin\alpha, \\ z(0) &= 0, \\ p_1(0) &= \cos\alpha, \\ p_2(0) &= \sin\alpha. \end{aligned}$$

Rozwiązanie dla drugiego zestawu przebiega w sposób analogiczny. Rozwiązując układ charakterystyczny otrzymujemy

$$\begin{aligned} x(s, \alpha) &= (2s + 1)\cos\alpha, \\ y(s, \alpha) &= (2s + 1)\sin\alpha, \\ z(s, \alpha) &= 2s, \\ p_1(s, \alpha) &= \cos\alpha, \\ p_2(s, \alpha) &= \sin\alpha. \end{aligned}$$

Niech teraz $(x, y) \in \Omega$. Odwracając parametryzację przechodzącej przez ten punkt krzywej charakterystycznej, dostajemy zależność

$$2s + 1 = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Stąd wzór na rozwiązanie naszego zagadnienia ma postać

$$u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - 1.$$

Drugi zestaw danych początkowych prowadzi do rozwiązania postaci

$$u(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

W szczególności widzimy więc, że rozwiązanie naszego zagadnienia nie jest jednoznaczne.
$\Diamond$

14.6 Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 14.6. Znaleźć rozwiązanie zagadnienia brzegowego

$$\begin{aligned} -yu_x + xu_y &= 1 \quad \text{dla } (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) &= x \quad \text{dla } x > 0. \end{aligned}$$

Zadanie 14.7. Znaleźć rozwiązanie zagadnienia brzegowego

$$\begin{aligned} y\, u_x - x\, u_y &= u \quad \text{w } \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}, \\ u(x, 0) &= x \quad \text{dla } x \geq 0. \end{aligned}$$

Czy to zagadnienie posiada rozwiązanie określone na całej płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$? Czy jest ono jednoznaczne?

Zadanie 14.8. Znaleźć rozwiązanie zagadnienia

$$\begin{aligned} x^2 u_x + y^2 u_y &= (x + y)u \quad \text{dla } (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, \frac{x}{2}) &= 1 \quad \text{dla } x > 0. \end{aligned}$$

Uwaga: W kolejnych zadaniach nie ma sprecyzowanego obszaru, w którym ma być określona funkcja będąca rozwiązaniem danego równania. Należy rozwiązać równanie w możliwie największym obszarze i zbadać przedłużalność tego rozwiązania.

Zadanie 14.9. Znaleźć rozwiązanie równania

$$u_x - xu_y = u$$

spełniające warunek

$$u(x, 0) = x.$$

Zadanie 14.10. Znaleźć rozwiązanie równania

$$xu_x + 2yu_y + u_z = 3u$$

spełniające warunek

$$u(x, y, 0) = x - y.$$

Zadanie 14.11. Znaleźć rozwiązanie równania

$$u_y - uu_x + 2u = 0$$

spełniające warunek

$$u(x,0) = x.$$

Zadanie 14.12. Znaleźć rozwiązanie równania

$$uu_x + u_y = 1$$

spełniające warunek

$$u(x,x) = \frac{1}{2}x.$$

Zadanie 14.13. Znaleźć rozwiązanie równania

$$u_y + 3u_x = -u^2$$

spełniające warunek

$$u(x,0) = x^2.$$

Zadanie 14.14. Znaleźć rozwiązanie równania

$$u_x + u_y = u^2$$

spełniające warunek

$$u(x,-x) = x.$$

Zadanie 14.15. Znaleźć wzór na rozwiązanie równania

$$u_x + u_y = u^2$$

spełniające warunek

$$u(x,0) = g(x),$$

gdzie g jest zadaną funkcją ciągłą.

Zadanie 14.16. Znaleźć rozwiązanie równania

$$x(y^2+u)u_x - y(x^2+u)u_y = (x^2-y^2)u$$

spełniające warunek

$$u(x,-x) = 1.$$

Zadanie 14.17. Znaleźć rozwiązanie równania

$$u_x^2 - u_y^2 = xu + y$$

spełniające warunek

$$u(x,0) = -x.$$

Zadanie 14.18. Znaleźć rozwiązanie równania

$$u_x^2 - u_y^2 = xu^2$$

spełniające warunek

$$u(x,x) = 1.$$

Zadanie 14.19. Znaleźć rozwiązanie równania

$$u_x u_y = u \quad \text{w } \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$$

spełniające warunek

$$u(0,y) = y^2.$$

Zadanie 14.20. Niech $B = B(0,1)$ oznacza otwarte koło jednostkowe w $\mathbb{R}^2$. Niech funkcja $u \in C^1(\overline{B})$ będzie rozwiązaniem równania

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + u = 0,$$

gdzie a oraz b są zadanymi funkcjami ciągłymi. Wykazać, że jeśli

$$a(x,y)x + b(x,y)y > 0 \quad \text{dla } (x,y) \in \partial B,$$

to $u \equiv 0$.

Zadanie 14.21. Rozważmy równanie Burgersa bez lepkości

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = u_t + uu_x = 0 \quad \text{dla } (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,$$
$$u(x,0) = u_0(x).$$

1. Przyjmijmy $u_0(x) = \operatorname{arctg} x$ i niech u będzie rozwiązaniem podanego wyżej zagadnienia. Wykazać, że dla ustalonego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$u(x,t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$$

   Czy zbieżność ta jest jednostajna względem x?

2. Zbadać, dla dowolnego u_0, zachowanie się rozwiązania przy $t \to \infty$.

Zadanie 14.22. Rozważmy zagadnienie

$$x^3 u_x + yu_y = c(x,y)u \quad \text{w } \mathbb{R}^2$$
$$u(\cos\alpha, \sin\alpha) = g(\alpha) \quad \text{dla } \alpha \in (-\pi, \pi],$$

gdzie g jest funkcją ciągłą na okręgu jednostkowym w $\mathbb{R}^2$, zaś $c \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

1. Znaleźć wzór na funkcję $u \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus (0,0))$ będącą rozwiązaniem tego zagadnienia w obszarze $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.

2. Załóżmy, że $c(0,0) < 0$. Wykazać, że funkcję u można przedłużyć do funkcji klasy $C^1(\mathbb{R}^2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g \equiv 0$ (co oznacza, że wtedy $u \equiv 0$).

3. Załóżmy, że $c(0,0) > 0$. Wykazać, że funkcję u można wówczas przedłużyć do funkcji klasy $C^0(\mathbb{R}^2)$.

4. Załóżmy, że $c(0,0) = 0$. Wykazać, że w ogólności (dla dowolnego c i dowolnego g) nie można przedłużyć funkcji u do funkcji klasy $C^0(\mathbb{R}^2)$.

5. Niech $c(x,y) = y$ oraz załóżmy, że

$$g(0) = g(\pi) = \frac{1}{\mathrm{e}} g(\frac{\pi}{2}) = \mathrm{e} g(-\frac{\pi}{2}) = K$$

dla pewnego $K \in \mathbb{R}$. Wykazać, że

$$\lim_{t \to 0^+} u(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = K \quad \forall \alpha \in (-\pi, \pi].$$

Czy u można przedłużyć do funkcji ciągłej na $\mathbb{R}^2$?

6. Niech $c(x,y) = x^2$ oraz załóżmy, że

$$g(\frac{\pi}{2}) = g(-\frac{\pi}{2}) = 0.$$

Czy u można przedłużyć do funkcji ciągłej na $\mathbb{R}^2$?

Zadanie 14.23. Rozważmy zagadnienie

$$\begin{aligned} u_t + h(u)u_x = 0 \quad & \text{w } \Omega = \{(x,t) : x \in \mathbb{R}, t > 0\} \\ u(x,0) = g(x) \quad & \text{dla } x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

gdzie $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ oraz $g \in C^0(\mathbb{R})$.

1. Wypisać i rozwiązać układ charakterystyczny dla tego zagadnienia.

2. Załóżmy, że $g \in C^1(\mathbb{R})$. Podać warunek, jaki muszą spełniać funkcje h oraz g, aby istniało jednoznaczne rozwiązanie tego zagadnienia w obszarze $\mathbb{R} \times [0,T]$ dla pewnego dostatecznie małego T. Wyznaczyć maksymalną wartość T_{max} dla T. Wykazać, że rzeczywiście istnieje jednoznaczne rozwiązanie $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, T_{max}])$ dla g oraz h spełniających podany warunek.

3. Załóżmy, że

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x < 0, \\ 0 & \text{dla } x \geq 0. \end{cases}$$

Podać warunek na funkcję h, aby krzywe charakterystyczne $(x(s), t(s))$ się nie przecinały.