3. Równanie przewodnictwa cieplnego

Pomijając jedną pochodną względem t w równaniu falowym, otrzymujemy równanie przewodnictwa cieplnego, zwane też niekiedy równaniem dyfuzji (patrz przykład $\boxed{\mathbf{C}}$ z pierwszego rozdziału). Przekonamy się, że własności rozwiązań w istotny sposób odróżniają oba te równania.

Rozważymy zagadnienie początkowe Cauchy'ego

$$\begin{cases} u_t = \Delta_x u & \text{dla } x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x) & \text{dla } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{3.1}$$

Będziemy zakładać, że funkcja f („początkowy rozkład temperatury") jest ograniczona i ciągła na $\mathbb{R}^n$. Rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego nazwiemy funkcję u, która należy do przestrzeni

$$C^2(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)) \cap C^0(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))^1$$

i spełnia warunki (3.1).

3.1. Istnienie rozwiązań

Niech

$$E(x,t) = \frac{1}{2^n(\pi t)^{n/2}} \exp(-|x|^2/4t), \qquad x \in \mathbb{R}^n, t > 0.$$

LEMAT 3.1. Funkcja E ma następujące własności:

$$\int_{\mathbb{R}^n} E(x,t)\,\mathrm{d}x = 1 \qquad \text{dla każdego } t > 0; \tag{3.2}$$

[1]Ten niezbyt precyzyjny zapis należy rozumieć następująco: u jest ciągła na półprzestrzeni domkniętej, a obcięcie u do półprzestrzeni otwartej jest funkcją klasy C^2.

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)E(x,t)\,\mathrm{d}x=\varphi(0)$$
$$\text{dla każdej funkcji } \varphi\in C_0^1(\mathbb{R}^n); \tag{3.3}$$

$$E_t=\Delta_x E \qquad \text{w } \mathbb{R}^n\times(0,\infty). \tag{3.4}$$

Dowód. Kładąc $y_i=x_i/2\sqrt{t}$ dla $i=1,\ldots,n$, otrzymujemy równość (3.2):

$$\int_{\mathbb{R}^n}E(x,t)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{-|y|^2}\,\mathrm{d}y=\prod_{i=1}^n\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-y_i^2}\,\mathrm{d}y_i=1.$$

Jeśli $\varphi\in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, to dla pewnej stałej K (np. dla $K=\sup_y|\nabla\varphi(y)|$) mamy

$$|\varphi(x)-\varphi(0)|\le K|x|, \qquad x\in\mathbb{R}^n.$$

Zatem

$$\begin{aligned}\left|\varphi(0)-\int_{\mathbb{R}^n}E(x,t)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n}E(x,t)(\varphi(0)-\varphi(x))\,\mathrm{d}x\right|\\ &\le \int_{\mathbb{R}^n}E(x,t)\big|\varphi(0)-\varphi(x)\big|\,\mathrm{d}x\\ &\le \frac{\mathrm{const}}{t^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{-|x|^2/4t}|x|\,\mathrm{d}x\\ &= \mathrm{const}'\cdot\sqrt{t}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{-|y|^2}|y|\,\mathrm{d}y \qquad \text{podstawiamy } x=2y\sqrt{t}\\ &\le C\sqrt{t}\longrightarrow 0 \qquad \text{dla } t\to 0.\end{aligned}$$

Ostatniej równości z tezy dowodzimy bezpośrednim rachunkiem. Niech $\widetilde{E}=2^n\pi^{n/2}E$. Wtedy

$$\widetilde{E}_t=-\tfrac{n}{2}t^{-\frac{n}{2}-1}\exp(-|x|^2/4t)+t^{-\frac{n}{2}}\exp(-|x|^2/4t)\frac{|x|^2}{4t^2},$$

$$\widetilde{E}_{x_i}=t^{-\frac{n}{2}}\exp(-|x|^2/4t)\frac{-x_i}{2t},$$

$$\widetilde{E}_{x_ix_i}=-\tfrac{1}{2}t^{-\frac{n}{2}-1}\exp(-|x|^2/4t)+t^{-\frac{n}{2}}\exp(-|x|^2/4t)\frac{x_i^2}{4t^2}.$$

Stąd $\widetilde{E}_t-\Delta_x\widetilde{E}=2^n\pi^{n/2}(E_t-\Delta_x E)=0$. □

TWIERDZENIE 3.2. Jeśli $f \in C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, to

$$u(x,t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(y)E(x-y,t)\,\mathrm{d}y & \text{dla } t > 0, \\ f(x) & \text{dla } t = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

jest funkcją ciągłą na $\mathbb{R}^n \times [0,+\infty)$, klasy C^∞ na $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ i spełnia zagadnienie Cauchy'ego dla równania przewodnictwa cieplnego (3.1).

Uwaga. Całkę w powyższym wzorze nazywa się **splotem**; będziemy czasem (niezbyt precyzyjnie) pisać $u = f * E$, mając na myśli właśnie (3.5).

Dowód. Po pierwsze, zauważmy, że całka jest dobrze określona i mamy

$$|u(x,t)| \le \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} E(x-y,t)\,\mathrm{d}y = \|f\|_\infty,$$

gdyż $\int E(x-y,t)\,\mathrm{d}y = \int E(y,t)\,\mathrm{d}y = 1$.

Po drugie, funkcja podcałkowa zależy od (x,t) w sposób gładki. Ze względu na szybko malejący, uzbieżniający całkę czynnik $\exp(-|x|^2/4t)$, można dowolną liczbę razy różniczkować pod znakiem całki. Stąd już wynika, że $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$.

Pozostaje sprawdzić ciągłość u w punktach postaci $(a,0)$, gdzie $a \in \mathbb{R}^n$ – to znaczy wykazać, że $u(x,t) \to u(a,0) = f(a)$ dla $(x,t) \to (a,0)$. Z uwagi na ciągłość f można się ograniczyć do rozważenia przypadku $t \neq 0$.

Ponieważ

$$f(a) = \int_{\mathbb{R}^n} f(a)E(x-y,t)\,\mathrm{d}y,$$

więc z nierówności trójkąta

$$\begin{aligned} |u(x,t) - f(a)| &\le \int_{\mathbb{R}^n} |f(y) - f(a)|\, E(x-y,t)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-z) - f(a)|\, E(z,t)\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

$$= \int\limits_{|z|\le\delta} |f(x-z)-f(a)|\, E(z,t)\,\mathrm{d}z$$
$$+ \int\limits_{|z|>\delta} |f(x-z)-f(a)|\, E(z,t)\,\mathrm{d}z \overset{\text{ozn.}}{=} I_1 + I_2.$$

Całki I_1 i I_2 oszacujemy oddzielnie, odpowiednio dobierając δ.

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Dobierzmy δ tak, aby

$$|f(\xi)-f(a)| < \tfrac{\varepsilon}{2} \qquad \text{dla } |\xi - a| < 2\delta.$$

Wtedy dla $|x-a| < \delta$ i $|z| < \delta$ mamy $|(x-z)-a| < 2\delta$, przeto w całce I_1 funkcja podcałkowa $|f(x-z)-f(a)|$ nie przekracza $\frac{\varepsilon}{2}$. Ponieważ zaś $\int E = 1$, więc widzimy, że $I_1 < \frac{\varepsilon}{2}$.

Aby oszacować I_2, stosujemy brutalnie nierówność trójkąta, a następnie dokonujemy zamiany zmiennych $z \mapsto y = z/2\sqrt{t}$, $2^{-n}t^{-n/2}\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}y$. Oto wynik:

$$I_2 \le 2\|f\|_\infty \int\limits_{|z|>\delta} \frac{1}{2^n(\pi t)^{n/2}} \mathrm{e}^{-|z|^2/4t}\,\mathrm{d}z$$
$$= \mathrm{const} \int\limits_{|y|>\frac{\delta}{2\sqrt{t}}} \mathrm{e}^{-|y|^2}\,\mathrm{d}y.$$

Ostatnia całka zbiega do zera dla $t \to 0^+$, bowiem całkujemy ustaloną funkcję klasy $L^1(\mathbb{R}^n)$ po zewnętrzu coraz większych kul (o promieniach rosnących do $+\infty$). $\square$

Widzimy więc, że zagadnienie Cauchy'ego dla równania przewodnictwa cieplnego zawsze ma przynajmniej jedno rozwiązanie. W dodatku jest to rozwiązanie klasy C^∞. (Przypomnijmy, dla porównania, że o rozwiązaniach równania falowego można było twierdzić jedynie, że są klasy C^2 i potrzebne były mocniejsze założenia o danych początkowych).

W dowodzie twierdzenia 3.2 przekonaliśmy się ponadto, że $|u(x,t)| \le \|f\|_\infty$. Nietrudno zauważyć, że $u(x,t) \le \sup f$, co z fizycznego punktu widzenia oznacza, że w żadnym punkcie i w żadnej chwili temperatura nie może być większa, niż maksymalna temperatura w chwili początkowej.

Rozwiązanie $u = f * E$ ma jeszcze jedną ciekawą własność. Jeśli f jest nieujemną funkcją ciągłą o zwartym nośniku i $f > 0$ w pewnej kuli B, to dla dowolnego $t > 0$ i dowolnego $x \in \mathbb{R}^n$ mamy

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)E(x-y,t)\,\mathrm{d}y \ge \int_B f(y)E(x-y,t)\,\mathrm{d}y > 0$$

(funkcja podcałkowa jest dodatnia). Zwróćmy uwagę, że jest tak nawet dla bardzo małych $t > 0$ i nawet dla tych x, które leżą bardzo daleko od nośnika f, tzn. od miejsca, „gdzie na początku nie ma mrozu". Zatem równanie $u_t - \Delta_x u = 0$ przewiduje, że ciepło rozprzestrzenia się (jest propagowane) z **nieskończoną prędkością**! To, z punktu widzenia fizyka, poważna wada tego modelu; w różnorodnych zastosowaniach matematyki rozpatruje się więc rozmaite bardziej zawiłe równania nieliniowe, dla których prędkość propagacji zaburzeń jest skończona.

Wróćmy jednak do matematycznej istoty rzeczy. Wykazaliśmy istnienie rozwiązania. Nasuwa się naturalne pytanie: a co z jednoznacznością?

3.2. Zasada maksimum

LEMAT 3.3 (Słaba własność maksimum). Niech $\Omega_T = \mathbb{R}^n \times (0,T)$. Załóżmy, że

$$u \in C^2(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T) \cap L^\infty(\Omega_T)$$

spełnia w Ω_T równanie $u_t = \Delta_x u$. Wtedy

$$\sup_{(x,t)\in\Omega_T} u(x,t) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} u(x,0), \tag{3.6}$$

$$\inf_{(x,t)\in\Omega_T} u(x,t) = \inf_{x\in\mathbb{R}^n} u(x,0). \tag{3.7}$$

Dowód. Wystarczy wykazać pierwszą równość (funkcja $-u$ też jest rozwiązaniem). Oczywiście

$$M := \sup_{\Omega_T} u \ \ge N := \sup_{\mathbb{R}^n\times\{0\}} u.$$

Przypuśćmy, że teza jest fałszywa i $M > N$. Weźmy liczbę $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \frac{1}{3}(M-N)$. Z definicji kresu górnego wynika, że istnieje taki punkt $(a,t_0) \in \Omega_T$, że

$$u(a,t_0) > N + 3\varepsilon, \qquad t_0 < T.$$

Rozpatrzmy funkcję

$$w(x,t) = u(x,t) - \alpha(2nt + |x|^2), \qquad \alpha > 0.$$

Ustalmy $\alpha > 0$ na tyle małe, aby

$$w(a, t_0) > N + 2\varepsilon.$$

Mamy

$$w(x,t) \le M - \alpha|x|^2 \le N \qquad \text{dla } |x|^2 = R^2 \ge \tfrac{M-N}{\alpha}. \tag{3.8}$$

Można założyć, że $a \in B(0,R)$ (w razie potrzeby powiększamy R). Ponadto,

$$w(x,0) = u(x,0) - \alpha|x|^2 \le N. \tag{3.9}$$

Obliczając pochodne, przekonujemy się, że

$$w_t = u_t - 2\alpha n, \qquad \Delta_x w = \Delta_x u - 2\alpha n,$$

więc $w_t = \Delta_x w$.

Niech teraz K będzie walcem $\overline{B(0,R)} \times [0, T_1]$, gdzie $T_1 \in (t_0, T)$, i niech

$$\Sigma :\ = \Big(B(0,R) \times \{0\}\Big) \cup \Big(\partial B(0,R) \times [0, T_1]\Big)$$

oznacza sumę dolnego denka i powierzchni bocznej K. Z warunków (3.8) i (3.9) wynika, że

$$\sup_{\Sigma} w \ \le N.$$

Połóżmy $h(x,t) = w(x,t) + \beta|x|^2$. Jeśli β jest dostatecznie małą liczbą dodatnią, to

$$\sup_{\Sigma} h \ \le N + \varepsilon.$$

Funkcja $h : K \to \mathbb{R}$ osiąga swój kres górny. Ponieważ $h(a,t_0) \ge w(a,t_0) > N + 2\varepsilon$, więc albo h osiąga kres górny w pewnym punkcie wnętrza K, albo na górnym denku $B(0,R) \times \{T_1\}$ (na zbiorze Σ wartości h są zbyt małe).

W pierwszym przypadku w punkcie maksimum lokalnego mamy

$$h_t = w_t = 0, \qquad \Delta_x h \le 0$$

(proszę przypomnieć sobie, jakie są konieczne i dostateczne warunki istnienia ekstremum funkcji wielu zmiennych!). Stąd $\Delta_x w = \Delta_x h - 2n\beta < 0 = w_t$, co przeczy temu, że w spełnia równanie przewodnictwa ciepła.

W drugim przypadku rozumujemy podobnie, z jedną różnicą: mamy tylko $h_t = w_t \geq 0$, ale to i tak wystarczy, by (jak przed chwilą) uzyskać sprzeczność. $\square$

Z tego lematu natychmiast wynika jednoznaczność rozwiązań – trzeba po prostu odpowiednio zawęzić klasę rozważanych funkcji.

Wniosek 3.4. Rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego

$$\begin{cases} u_t = \Delta_x u & \text{dla } x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x) & \text{dla } x \in \mathbb{R}^n; \quad f \in C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

istnieje, jest funkcją gładką i jest jednoznaczne w klasie $\mathcal{X}$ tych

$$u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)) \cap C^0(\mathbb{R}^n \times [0,\infty)),$$

które spełniają warunek

$$\forall\, T > 0 \qquad \sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} |u| < +\infty.$$

Dowód. Komentarza wymaga jedynie jednoznaczność, ale to natychmiastowe *reductio ad absurdum*: stosujemy lemat 3.3 do różnicy dwóch rozwiązań. $\square$

Uwagi.

(1) W istocie jednoznaczność można udowodnić przy nieco słabszych założeniach. Wystarczy mianowicie przyjąć, że dla dowolnego $T > 0$ istnieją stałe $C_T, a_T > 0$ takie, że

$$|u(x,t)| \leq C_T \exp(a_T |x|^2) \qquad \text{dla } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T].$$

(2) Jeśli nie zakłada się nic prócz gładkości rozwiązań (tzn. nie narzuca żadnych ograniczeń wzrostu u dla $|x| \to +\infty$), to wtedy jednoznaczności rozwiązań **nie ma**. Odpowiedni (zawiły) przykład podał Tichonow; szczegóły można odnaleźć np. w książce T. Körnera *Fourier Analysis*.

(3) Jak wykazali Aronson i Widder, **nieujemne** rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego dla równania przewodnictwa cieplnego są wyznaczone jednoznacznie. Jest to bardzo ciekawy wynik m.in. z uwagi na fizyczną interpretację równania: ponieważ istnieje temperatura **zera bezwzględnego**, więc niejednoznaczność z przykładu Tichonowa nie dotyczy **fizycznych** rozwiązań równania przewdonictwa cieplnego.

3.3. Niejednorodne równanie przewodnictwa cieplnego

Pokażemy jeszcze, w jaki sposób rozwiązuje się zagadnienie

$$\begin{cases} u_t = \Delta_x u + h & \text{w } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u = f & \text{na } \mathbb{R}^n \times \{0\}. \end{cases} \tag{3.10}$$

Założymy, że funkcje f i h są ciągłe i ograniczone (f na $\mathbb{R}^n$, h na $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$).

Rozwiązania poszukamy w postaci $u = v + w$, gdzie v i w spełniają odpowiednio:

$$\begin{cases} v_t = \Delta_x v & \text{w } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ v = f & \text{na } \mathbb{R}^n \times \{0\}, \end{cases} \tag{3.11}$$

$$\begin{cases} w_t = \Delta_x w + h & \text{w } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ w = 0 & \text{na } \mathbb{R}^n \times \{0\}. \end{cases} \tag{3.12}$$

Wiemy już, jak znaleźć v: wystarczy wziąć $v = f * E$.

LEMAT 3.5. Funkcja

$$w(x,t) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} h(y,s)E(x-y,t-s)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \tag{3.13}$$

jest rozwiązaniem zagadnienia (3.12).

Dowód. Sprawdźmy najpierw, że w spełnia odpowiednie równanie różniczkowe. Otóż, dla $t > 0$ mamy (dociekliwy Czytelnik powinien starannie wykonać różniczkowanie)

$$w_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} h(y,s)E_t(x-y,t-s)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s + \lim_{\tau\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} h(y,t)E(x-y,\tau)\,\mathrm{d}y.$$

Granica w drugim składniku istnieje na mocy lematu 3.1 i jest równa $h(x,t)$ (patrz (3.3)). Zatem

$$w_t = h + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} hE_t\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s.$$

Oczywiście,

$$\Delta_x w = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} h \Delta_x \, E \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}s,$$

więc

$$w_t - \Delta_x w = h + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} h \underbrace{(E_t - \Delta_x E)}_{= 0 \text{ (patrz (3.4))}} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}s = h.$$

Pozostaje przekonać się, że w jest funkcją ciągłą w punktach $\mathbb{R}^n \times \{0\}$. To proste:

$$|w(x,t)| \le \int_0^t \sup |h| \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} E(x-y, t-s) \, \mathrm{d}y}_{= 1 \text{ (patrz (3.2))}} \, \mathrm{d}s$$

$$= t \sup |h| \longrightarrow 0 \qquad \text{dla } t \to 0.$$

□

Uwaga. Jednoznaczność rozwiązań zagadnienia (3.10) w klasie funkcji opisanej we wniosku 3.4 wynika natychmiast z jednoznaczności rozwiązań dla $h \equiv 0$.

3.4. Dygresja probabilistyczna

Wzór (3.5) na rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego ma ciekawą interpretację probabilistyczną, która jest jednym ze źródeł bogatych związków teorii równań różniczkowych cząstkowych z rachunkiem prawdopodobieństwa i procesami stochastycznymi. Opiszemy pokrótce tę interpretację w najprostszym przypadku: dla $n = 1$.

Funkcja E, służąca do produkowania rozwiązań u z wartości początkowych f, jest (jak być może Czytelnik sam zauważył) gęstością rozkładu normalnego. Dokładniej,

$$E(z,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} \, \mathrm{e}^{-z^2/4t}$$

jest gęstością rozkładu normalnego $N(0, \sigma)$ dla parametru $\sigma = \sqrt{2t}$.

Przyjmijmy, że na pewnej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dana jest rodzina zmiennych losowych W_t, indeksowana nieujemnym parametrem t, który będziemy interpretować jako czas. Załóżymy, że spełnione są następujące warunki:

1. $W_0 = 0$ z prawdopodobieństwem 1 (tzn. prawie wszędzie na Ω względem miary P).
2. W_t ma, dla każdego $t > 0$, rozkład normalny $N(0, \sigma)$ z parametrem $\sigma = \sqrt{2t}$.
3. Jeśli odcinki (s_i, t_i) są rozłączne, $i = 1, 2, \ldots, m$, to przyrosty $W_{t_i} - W_{s_i}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi. (W szczególności, dla $t > s$ zmienne $W_t - W_s$ i W_s są niezależne).
4. Dla P-prawie wszystkich $\omega \in \Omega$ trajektorie $t \mapsto W_t(\omega)$ są ciągłymi funkcjami zmiennej $t \in [0, +\infty)$.

Taką rodzinę zmiennych losowych nazwiemy ruchem Browna lub procesem Wienera. Różnorodne konstrukcje odpowiedniej przestrzeni probabilistycznej i zmiennych W_t można odnaleźć w wielu podręcznikach rachunku prawdopodobieństwa, np. w książce J. Jakubowskiego i R. Sztencla *Rachunek prawdopodobieństwa*, a także w książce P. Billingsley'a *Prawdopodobieństwo i miara*.

Na typowym wykładzie rachunku prawdopodobieństwa dowodzi się, że jeśli zmienna losowa $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ ma rozkład z gęstością g, to wówczas

$$\int_{\mathbb{R}} g(z) f(z) \, \mathrm{d}z = \int_{\Omega} f(\xi(\omega)) \, \mathrm{d}P(\omega) = \mathbb{E}\big(f(\xi)\big)$$

dla $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ciągłych i ograniczonych. Zatem w naszej sytuacji, gdy $g = E(\cdot, t)$ jest gęstością odpowiedniego rozkładu normalnego, mamy

$$u(x,t) \overset{(3.5)}{=} \int_{\mathbb{R}} E(z,t) f(x+z) \, \mathrm{d}z = \mathbb{E}\big(f(x + W_t)\big).$$

Ten wzór ma następującą interpretację: aby określić temperaturę w chwili t w punkcie x, należy „wypuścić” z x ruch Browna, odczekać czas t, złożyć otrzymaną zmienną losową $x + W_t$ z początkowym rozkładem temperatury f i wziąć wartość oczekiwaną. Można przyjmować, że jest to matematyczne uzasadnienie zgodności dwóch modeli zjawiska rozprzestrzeniania się ciepła: modelu w skali makroskopowej (odwołującego się do równania różniczkowego, w którym przyjmujemy, że substancja stanowi jednorodne *continuum*) i modelu w skali mikro (w którym uznaje się, że powodem przekazywania ciepła są losowe zderzenia wielu cząsteczek, podlegających dyfuzji).