GRZEGORZ KARCH

Zadanie 1. Udowodnij, że zbiór funkcji ciągłych $C([a,b])$ z normą $\|u\| = \max_{x\in[a,b]} |u(x)|$ jest przestrzenią Banacha.

Zadanie 2. Niech $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ będzie polem wektorowym klasy C^1. Zaproponuj założenia na funkcję F, które gwarantują istnienie rozwiązań równania $x = F(x)$.

Zadanie 3. Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią Banacha oraz niech $F : X \mapsto X$ będzie kontrakcją, tzn. istnieje $k < 1$ takie, że dla każdego $x, y \in X$ zachodzi

$$\|F(x) - F(y)\| \leqslant k\|x - y\| \ .$$

Niech x' będzie rozwiązaniem równania $x = F(x)$. Oznaczmy przez $\{x_n\}$ ciąg iteracji $x_{n+1} = F(x_n)$ rozpoczynający się od dowolnego $x_0 \in X$.
Udowodnij oszacowania:

1. $\|x_{n+1} - x'\| \leqslant k\|x_n - x'\|$ (szybkość zbieżności);
2. $\|x_{n+1} - x'\| \leqslant \frac{k}{1-k}\|x_{n+1} - x_n\|$ (oszacowanie a posteriori);
3. $\|x_{n+1} - x'\| \leqslant \frac{k^{n+1}}{1-k}\|x_1 - x_0\|$ (oszacowanie a priori).

Zadanie 4. Ustal, dla jakich wartości parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ operator $F : C([a,b]) \to C([a,b])$ dany wzorem

$$F(u)(x) = x + \lambda \int_a^b \sin(u(y))\,\mathrm{d}y$$

jest kontrakcją.

Zadanie 5. Znajdź $b > 0$ oraz domknięty podzbiór przestrzeni $C([0,b])$, na którym operator F dany wzorem

$$F(u)(x) = 1 + \int_0^x u^3(y)\,\mathrm{d}y$$

jest kontrakcją.

Zadanie 6. Zaproponuj warunki, dla których równanie

$$u(x) = u_0(x) + \lambda \int_{\mathbb{R}} K(x,y)u(y)\,\mathrm{d}y\ ,$$

gdzie $u_0 \in L^p(\mathbb{R})$, ma jednoznaczne rozwiązanie $u(x) \in L^p(\mathbb{R})$.

Zadanie 7. Rozwiąż poprzednie zadanie nie korzystając z twierdzenia o kontrakcji.
WSKAZÓWKA: Rezolwenta operatora liniowego jest zbiorem otwartym.

Zadanie 8. Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią Banacha oraz $B: X \times X \mapsto X$ będzie ograniczoną formą dwuliniową, tzn. istnieje $\eta > 0$ taka, że dla każdych x_1, x_2 zachodzi oszacowanie
$$\|B(x_1, x_2)\| \leqslant \eta \|x_1\| \|x_2\| \,.$$
Udowodnij, że jeżeli $0 < \varepsilon < \frac{1}{(4\eta)}$ oraz $y \in X$ spełnia $\|y\| < \varepsilon$, to równanie
$$x = y + B(x, x)$$
ma rozwiąznie w X spełniające $\|x\| \leqslant 2\varepsilon$. Jest to jedyne rozwiązanie w kuli $2\varepsilon B_X$. Pokaż, że rozwiązanie to zależy w sposób ciągły od y, tzn. jeżeli $\|\tilde{y}\| \leqslant \varepsilon$, $\tilde{x} = \tilde{y} + B(\tilde{x}, \tilde{x})$ oraz $\|\tilde{x}\| \leqslant 2\varepsilon$, to:
$$\|x - \tilde{x}\| \leqslant \frac{1}{1 - 4\eta\varepsilon} \|y - \tilde{y}\| \,.$$

Zadanie 9. Zastosuj poprzednie zadanie do dowodu istnienia rozwiązań równania
$$u(x) = u_0(x) + \int_0^1 K(x, y) u^2(y) \, \mathrm{d}y$$
gdzie $u_0 \in C([0,1])$ oraz $K \in C([0,1] \times [0,1]$ są dane.