GRZEGORZ KARCH

Zadanie 1. (Twierdzenie Arzeli-Ascolego)
Rozważamy p. Banacha $C([a,b])$, gdzie $-\infty < a < b < \infty$, ze zwykłą normą supremum. Załóżmy, że $M \subset X$ spełnia następujące warunki:

1. zbiór M jest ograniczony, tzn. $\exists r > 0\, \forall u \in M\; \|u\| \leqslant r$,
2. zbiór M jest jednakowo ciągły, tzn.

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x, y \in [a,b]\, \forall u \in M \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |u(x) - u(y)| < \varepsilon\,.$$

Udowodnij, że M jest warunkowo zwartym podzbiorem X.

Zadanie 2. Rozważamy p. Banacha:

- $C([a,b])$ z normą $\|u\|_0 = \sup\limits_{x\in[a,b]} |u(x)|$,
- $C^1([a,b])$ z normą $\|u\|_1 = \sup\limits_{x\in[a,b]} |u(x)| + \sup\limits_{x\in[a,b]} |u'(x)|$.

Udowodnij, że operator włożenia $\mathrm{Id}:\ C^1([a,b]) \mapsto C([a,b])$ jest operatorem zwartym.

Zadanie 3. Dla ustalonego $\alpha \in [0,1)$ definiujemy przestrzeń Höldera

$$C^\alpha([0,1]) = \left\{ u \in C([0,1]) \ :\ [u]_\alpha := \sup_{x,y\in[0,1]} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty \right\}$$

z normą

$$\|u\|_\alpha = \|u\|_\infty + [u]_\alpha\,.$$

Udowodnij, że $C^\alpha([0,1])$ jest p. Banacha, oraz że dla dowolnych $0 \leqslant \alpha < \beta < 1$ zachodzi włożenie $\mathrm{Id}:\ C^\beta([0,1]) \mapsto C^\alpha([0,1])$, będące operatorem zwartym.

Zadanie 4. Niech K będzie zwartym podzbiorem $\mathbb{R}^d$. Dla $u \in C(K)$ półnormę $[u]_\alpha$ definujemy jak w poprzednim zadaniu.
Udowodnij, że dla $\alpha > 1$ jeżeli $[u]_\alpha < \infty$ to u jest stała na składowych spójności K.

Zadanie 5. (Twierdzenie Peano)
Niech $f = f(t,y)$ będzie funkcją ciągłą, $\delta > 0$ oraz $y_0 \in \mathbb{R}$. Załóżmy, że $y_0(t)$ jest funkcją ciągłą taką, że $y_0(0) = y_0$ oraz $y_0'(0) = f(0,y_0)$. Dla każdego $\varepsilon \in (0,\delta)$ definiujemy funkcję:

$$y_\varepsilon(t) = \begin{cases} y_0(t) & -\delta \leqslant t \leqslant 0 \\ y_0 + \displaystyle\int_0^t f(s, y_\varepsilon(s-\varepsilon))\, \mathrm{d}s & 0 \leqslant t \leqslant \alpha \end{cases}$$

dla pewnego $\alpha > 0$.
Istnieje wtedy $\alpha > 0$ takie, że zbiór $\{y_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,\delta)}$ jest warunkowo zwarty w $C([0,\alpha])$ oraz każdy podciąg zbiega do rozwiązania zagadnienia

$$y' = f(t,y), \quad y(0) = y_0\,.$$

Zadanie 6. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie ciągłym polem wektorowym. Załóżmy, że istnieje $R > 0$ takie, że dla $|x| = R$ zachodzi $\langle f(x), x\rangle \geqslant 0$.
Udowodnij, że istnieje x_0 spełniający $\|x_0\| \leqslant R$ taki, że $f(x_0) = 0$.

WSKAZÓWKA: Założyć, że $f(x) \neq 0$ w kuli $B(0, R)$. Pokazać, że $g(x) = -\frac{Rf(x)}{\|f(x)\|}$ ma punkt stały x_0 spełniający $\|x_0\| = R$.

Zadanie 7. Niech A będzie operatorem liniowym na p. Banacha X, przekształacającym zbiory ograniczone na zbiory warunkowo zwarte.
Udowodnij, że A jest ciągły.

Zadanie 8. Niech A będzie operatorem liniowym zwartym na p. Banacha X.
Udowodnij, że zbiór wektorów własnych, odpowiadających wartości własnej $\lambda \in \mathbb{R}$, tworzy przestrzeń linową skończenie wymiarową.

Zadanie 9. Niech A, B będą ciągłymi operatorami liniowymi na p. Banacha X.
Udowodnij, że jeżeli co najmniej jeden z operatorów A, B jest operatorem zwartym, to operatory AB i BA są operatorami zwartymi.

Zadanie 10. (Twierdzenie Sheffera)
Niech A_λ będzie rodziną zwartych operatorów nieliniowych na p. Banacha X, zależnych w sposób ciągły od parametru $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ (w silnej topologii operatorowej). Załóżmy, że:

1. istnieje $0 < a < \infty$ takie, że dla każdego rozwiązania x_λ równania $x = A_\lambda(x)$ zachodzi oszacowanie $\|x_\lambda\| \leqslant a$,

2. istnieje $b > a$ takie, że $\|A_0(x)\| \leqslant b$ dla $\|x\| = b$.

Wtedy operator A_1 ma punkt stały w kuli aB_X.

WSKAZÓWKA: Rozważyć operator

$$B(x) = \begin{cases} A_1(x) & \|x\| \leqslant a \\ A_{\frac{b-\|x\|}{b-a}}(x) & a \leqslant \|x\| \leqslant b \\ A_0(x) & \|x\| \geqslant b \end{cases}$$

i skorzystać z twierdzenia Schaudera.