○ **Ćwiczenie 1.4.8**
Znaleźć rozwiązania podanych zagadnień początkowych oraz podać przedziały, na których są one określone:

a) $y' + y = 1, \quad y(0) = 2;$

b) $y' + \frac{y}{t} = t, \quad y(-1) = 1;$

c) $y' + y \operatorname{tg} t = \frac{1}{\cos t}, \quad y(0) = 0;$

d) $y' = 2y + e^t - t, \quad y(0) = \frac{1}{4};$

e) $ty' + y = te^{t^2}, \quad y(1) = 2;$

f) $ty' + 2y = \cos t, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$

g) $y' = 2ty + 3t^2 e^{t^2}, \quad y(0) = 1;$

h) $ty' + y = t\sqrt{t}, \quad y(1) = 2.$

○ **Ćwiczenie* 1.4.9**
Uzasadnić, że rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$y' + p(t)y = q(t), \; y(t_0) = y_0$$

wyraża się wzorem

$$y(t) = y_0 \exp\left(-\int_{t_0}^{t} p(\tau)\, d\tau\right) + \int_{t_0}^{t} q(s) \exp\left(-\int_{s}^{t} p(\tau)\, d\tau\right) ds.$$

1.5 Równanie różniczkowe Bernoulliego

● **Definicja 1.5.1** *(równanie różniczkowe Bernoulliego‡)*
Równanie różniczkowe, które można zapisać w postaci

$$\text{(B)} \qquad y' + p(t)y = h(t)y^r,$$

gdzie $r \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, nazywamy równaniem Bernoulliego.

Uwaga. Gdyby dopuścić $r = 0$, to otrzymalibyśmy równanie różniczkowe liniowe niejednorodne postaci $y' + p(t)y = h(t)$. Natomiast dla $r = 1$ dostalibyśmy równanie różniczkowe liniowe jednorodne postaci $y' + \tilde{p}(t)y = 0$, gdzie $\tilde{p}(t) = p(t) - h(t)$. Zauważmy jeszcze, że dla $r > 0$ funkcja $y(t) \equiv 0$ jest jednym z rozwiązań równania Bernoulliego.

● **Fakt 1.5.2** *(sprowadzanie równania Bernoulliego do równania liniowego)*
Równanie różniczkowe Bernoulliego (B) przez zamianę zmiennych

$$z = y^{1-r}$$

sprowadza się do równania różniczkowego liniowego niejednorodnego postaci

$$z' + (1 - r)p(t)z = (1 - r)h(t).$$

‡Jakob Bernoulli (1654–1705), matematyk szwajcarski.

○ **Ćwiczenie 1.5.3**
Uzasadnić powyższy fakt.

○ **Ćwiczenie 1.5.4**
Scałkować podane równania Bernoulliego:

a) $y' + y = y^2;$

b) $y' - 2y = 2\sqrt{y};$

c) $3y' - y = \frac{t}{y^2};$

d) $dy = \left(y^2 e^t - y\right) dt;$

e) $y' - \frac{y}{2} = -\frac{2t}{y};$

f) $t^3 y' - 2ty = y^3;$

g) $\left(1 + t^2\right) y' - 2ty = 4\sqrt{y\left(1 + t^2\right)} \operatorname{arc\,tg} t;$

h) $2ty' = \left(t + 1 - 6y^2\right) y.$

○ **Ćwiczenie 1.5.5**
Rozwiązać podane zagadnienia początkowe:

a) $y' = y - \sqrt{y}, \quad y(0) = 4;$

b) $y' - y = \frac{t}{y}, \quad y(0) = -1;$

c) $y' - y \cos t = y^2 \cos t, \quad y(0) = 1;$

d) $y' + 4t^3 y^3 + 2ty = 0, \quad y(0) = 1;$

e) $ty' - y^2 \ln t + y = 0, \quad y(e) = 1;$

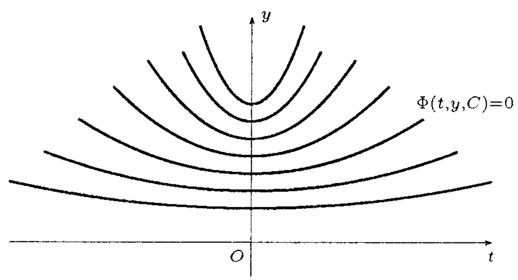
f) $ty^2 y' + y^3 = 1, \quad y(1) = 2.$

1.6 Krzywe ortogonalne*

● **Definicja 1.6.1** *(równanie rodziny krzywych)*
Jeżeli dla każdej wartości parametru C z pewnego przedziału równanie

$$\Phi(t, y, C) = 0$$

określa krzywą, to nazywamy je równaniem rodziny krzywych (rys. 1.6.1).

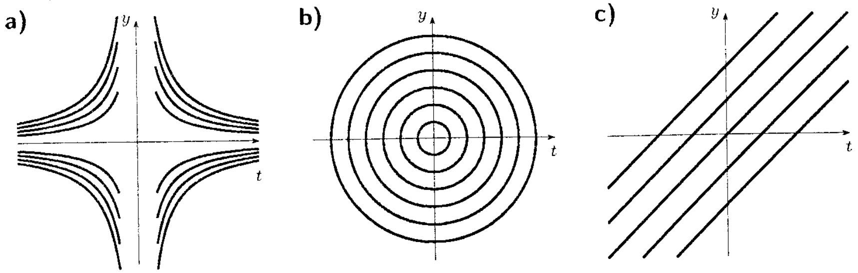


Rys. 1.6.1.

● **Przykład 1.6.2** *(rodziny krzywych)*
a) Równanie $yt - C = 0$, gdzie $C \neq 0$, określa rodzinę hiperbol (rys. 1.6.2 a)).

b) Równanie $t^2 + y^2 - C^2 = 0$, gdzie $C > 0$, określa rodzinę okręgów o środkach w początku układu współrzędnych (rys. 1.6.2 b)).

c) Równanie $y - t - C = 0$, gdzie $C \in \mathbb{R}$, określa rodzinę prostych równoległych (rys. 1.6.2 c)).



Rys. 1.6.2.

○ **Ćwiczenie 1.6.3**

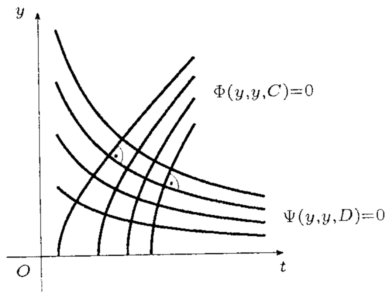
Wyznaczyć równania różniczkowe podanych rodzin krzywych:

a) $y = \dfrac{1}{t} + \dfrac{3t^2}{t^3 + C}$; **b)** $y = t + \dfrac{1}{1 + Ct}$;

c) $te^y - y^2 = C$; **d)** $y^2 = 2Ct + C^2$.

● **Definicja 1.6.4** *(rodziny krzywych ortogonalnych)*

Mówimy, że rodziny krzywych $\Phi(t, y, C) = 0$, $\Psi(t, y, D) = 0$ są ortogonalne, jeżeli w każdym punkcie przecięcia krzywych z obu rodzin, krzywe te tworzą kąt prosty (rys. 1.6.3).



Rys. 1.6.3.

● **Fakt 1.6.5** *(równanie różniczkowe rodziny krzywych ortogonalnych)*

Jeżeli $F(t, y, y') = 0$ jest równaniem różniczkowym rodziny krzywych, to równanie różniczkowe rodziny krzywych ortogonalnych ma postać

$$F\left(t, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0.$$

○ **Ćwiczenie 1.6.6**

Wyznaczyć i naszkicować rodziny krzywych ortogonalnych do podanych rodzin:

a) $y^2 + 2Ct = 0$, $C > 0$; **b)** $t^2 - y^2 = C^2$;

c) $t^2 + \dfrac{1}{2}y^2 = C^2$; **d)** $t^2 + y^2 = 2Ct$.

1.7 Zagadnienia prowadzące do równań różniczkowych

Przepływ i mieszanie cieczy

○ **Ćwiczenie 1.7.1** *(zobacz* **Przykład 1.20**, *str. 130)*

a) Zbiornik o pojemności 100 litrów jest napełniony do połowy 10 % wodnym roztworem soli. Po włączeniu pomp do zbiornika wlewa się czysta woda z prędkością 2 l/min, a powstała mieszanina wylewa się dwa razy wolniej. Jakie będzie stężenie soli w zbiorniku w chwili jego napełnienia?

b) Zbiornik o pojemności 100 litrów napełniony jest czystą wodą. Po włączeniu pomp do zbiornika wlewa się 10 % wodny roztwór alkoholu z prędkością 1 l/min, a powstała mieszanina wylewa się dwa razy szybciej. Po ilu minutach ilość alkoholu w zbiorniku będzie największa?

c) Zbiornik o pojemności 100 litrów napełniony jest do połowy czystą wodą. Po włączeniu pomp do zbiornika wlewa się 10 % wodny roztwór soli z prędkością 2 l/min, a powstała mieszanina wylewa się dwa razy wolniej. Jakie będzie stężenie soli w zbiorniku w chwili jego napełnienia?

d) Zbiornik o pojemności 100 litrów napełniony jest 10 % wodnym roztworem alkoholu. Z jaką prędkością należy wlewać do niego czystą wodę i jednocześnie z tą samą prędkością wylewać roztwór, aby po upływie 10 min od momentu włączenia pomp zawartość alkoholu spadła dwukrotnie?

Rozwój populacji

○ **Ćwiczenie 1.7.2** *(zobacz* **Przykład 1.21**, *str. 130)*

a) Wyznaczyć czas, po jakim stado 100 królików podwoi się, jeżeli wskaźnik wzrostu k jest równy $3 \times 10^{-6}\,s^{-1}$.

b) Kultura bakterii rozwija się według wykładniczego prawa wzrostu tak, że po jednym dniu osiąga 1.1 stanu wyjściowego. Po jakim czasie populacja podwoi się?

c) W rozwoju pewnej populacji organizmów zanotowano ich następujące liczebności N (wyrażone w milionach osobników) w czasie: $N(0) = 0.25$, $N(1) = 0.4$, $N(2) = 0.5$. Wyznaczyć stan nasycenia tej populacji.

d) Rozwiązać równanie logistyczne postaci $\dfrac{dN}{dt} = N(4 - N)$. Wyznaczyć chwilę t, w której $N(t) = 3$, jeżeli wiadomo, że $N(0) = 2$. Naszkicować krzywą całkową.