Rozdział 12

Metoda rozdzielania zmiennych

W tym rozdziale zajmiemy się metodą rozdzielania zmiennych, którą można zastosować, aby wyrazić jawnymi wzorami rozwiązania pewnych konkretnych równań różniczkowych cząstkowych. Skupimy się tu na równaniach hiperbolicznych i parabolicznych określonych na skończonym odcinku $[0, l] \in \mathbb{R}$.

Zakładana jest znajomość teorii szeregów Fouriera oraz równań różniczkowych zwyczajnych.

12.1 Zagadnienia hiperboliczne

Rozpocznijmy od jednorodnego równania struny o długości l zamocowanej na końcach:

$$\begin{array}{rcll} u_{tt} & = & u_{xx}, & x \in (0,l),\ t > 0, \\ u(0,t) = u(l,t) & = & 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) & = & u_0(x), & x \in (0,l), \\ u_t(x,0) & = & u_1(x), & x \in (0,l). \end{array} \tag{12.1}$$

O funkcjach określających warunki początkowe, czyli $u_0(x)$ i $u_1(x)$, zakładamy, że są elementami przestrzeni $L^2(0, l)$.

Aby rozwiązać powyższe zagadnienie, posłużymy się metodą Fouriera, zwaną inaczej metodą rozdzielania zmiennych. Polega ona na tym, aby poszukiwać rozwiązania postaci

$$u(x, t) = X(x)T(t). \tag{12.2}$$

Wstawiając to wyrażenie do równania (12.1) i dzieląc obie strony przez $X(x)T(t)$, otrzymujemy

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)}. \tag{12.3}$$

Ponieważ lewa strona powyższego równania zależy tylko od zmiennej x, a prawa tylko od zmiennej t, więc oba wyrażenia muszą być równe *tej samej* stałej. Nazwijmy ją $-\lambda$.

Stąd otrzymujemy zagadnienie

$$\begin{aligned} -X''(x) &= \lambda X(x) \qquad \text{dla } x \in (0,l), \\ X(0) &= X(l) = 0. \end{aligned} \tag{12.4}$$

Warunki brzegowe dla funkcji X wynikają z postaci, w której szukamy rozwiązania (12.2), oraz z warunków brzegowych dla funkcji $u(x,t)$ określonych w równaniu (12.1).

Dla zagadnienia własnego (12.4) mamy wartości własne

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

oraz odpowiadające im funkcje własne

$$X_n(x) = \sin\Big(\frac{n\pi x}{l}\Big).$$

Znalezienie wartości i funkcji własnych jest zadaniem z równań różniczkowych zwyczajnych. W ramach wskazówki - należy rozpatrzyć liczby λ ujemne, $\lambda = 0$ oraz λ dodatnie i zauważyć, że tylko w przypadku tych ostatnich spełniony będzie warunek brzegowy.

Dla każdego n znajdujemy funkcje $T_n(t)$ spełniające równanie (z uwagi na (12.3)):

$$T_n''(t) = -\lambda_n T_n(t).$$

Stąd

$$T_n(t) = A_n \sin(\sqrt{\lambda_n}t) + B_n \cos(\sqrt{\lambda_n}t).$$

Zwróćmy uwagę, że każda z funkcji $X_n(x)T_n(t)$ spełnia równanie (12.1) oraz zadane warunki brzegowe. Jednak aby znaleźć rozwiązanie spełniające także zadane warunki początkowe, na ogół musimy rozpatrzyć cały szereg

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(A_n \sin\big(\sqrt{\lambda_n}t\big) + B_n \cos\big(\sqrt{\lambda_n}t\big)\Big) \sin\big(\sqrt{\lambda_n}x\big). \tag{12.5}$$

Pozostaje więc wyliczyć stałe A_n i B_n. Funkcja u musi spełniać warunek

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\big(\sqrt{\lambda_n}x\big) = u_0(x)$$

oraz

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \lambda_n \sin\big(\sqrt{\lambda_n}x\big) = u_1(x).$$

Wystarczy więc rozwinąć funkcje u_0 i u_1 w szereg Fouriera.

Najpierw przypomnijmy, że każdą funkcję należącą do przestrzeni $L^2(-l,l)$ można rozwinąć w szerego Fouriera, czyli w szereg funkcji

$$\left\{ \frac{1}{2l}, \frac{1}{l}\sin\bigl(\sqrt{\lambda_n}x\bigr),\ \frac{1}{l}\cos\bigl(\sqrt{\lambda_n}x\bigr) \right\}_{n=1,1,2,\ldots}, \qquad x \in (-l, l),$$

które tworzą bazę ortonormalną w $L^2(-l,l)$. Ponieważ przyjęliśmy, że $u_0, u_1 \in L^2(0,l)$, więc możemy przedłużyć je nieparzyście lub parzyście (w zależności od potrzeby) na cały przedział $(-l,l)$. W przypadku naszego zagadnienia przedłużamy więc nieparzyście, co pozwala na rozwinięcie u_0 i u_1 w szereg sinusów, czyli funkcji $\{X_n\}_{n=1,2,\ldots}$.

Zatem współczynniki B_n i A_n wynoszą odpowiednio

$$B_n = \frac{1}{l}\int_0^l u_0(x)X_n(x)dx \tag{12.6}$$

oraz

$$A_n = \frac{1}{\lambda_n l}\int_0^l u_1(x)X_n(x)dx. \tag{12.7}$$

W ten sposób znaleźliśmy jawny wzór na rozwiązanie zagadnienia (12.3). Pozostaje pytanie, czy otrzymany szereg zbiega i czy określa rozwiązanie klasyczne, czy słabym, tzn. czy jego sumę można odpowiednio wiele razy zróżniczkować.

Aby $u(x,t)$ mogło być klasycznym rozwiązaniem zagadnienia (12.1), szereg (12.5) oraz szeregi drugich pochodnych po zmiennej x i t muszą zbiegać jednostajnie. Aby tak było, potrzebne są pewne założenia na funkcje u_0 i u_1.

Na przykład, jeśli $u_0(x) \in C^4[0,l]$ oraz $u_1(x) \in C^3[0,l]$, to przy założeniu warunków zgodności, tzn.

$$\begin{aligned} u_0(0) = u_0(l) = u_0''(0) = u_0''(l) = 0, \\ u_1(0) = u_1(l) = 0, \end{aligned}$$

funkcja $u(x,t)$ postaci (12.5) jest rozwiązaniem zagadnienia (12.1).

Rzeczywiście, przy powyższym założeniu o funkcjach u_0 i u_1, po wykonaniu we wzorach (12.6) oraz (12.7) odpowiedniej liczby całkowań przez części, otrzymujemy

$$|B_n| \le \frac{\mathrm{const}}{n^4}$$

oraz

$$|A_n| \le \frac{\mathrm{const}}{n^3}.$$

Różniczkując dwukrotnie wyrazy szeregu (12.11), zauważamy, że szereg ten jest jednostajnie zbieżny wraz z pochodnymi do rzędu drugiego włącznie. Dlatego otrzymana funkcja $u(x,t)$ jest funkcją klasy C^2, oraz klasycznym rozwiązaniem zagadnienia (12.1). Jeśli interesuje nas tylko istnienie słabych rozwiązań problemu (12.1), nie potrzebujemy różniczkować szeregu określającego funkcję u aż tyle razy.

12.1.1 Zagadnienia hiperboliczne: przypadek niejednorodny

Rozważmy teraz zagadnienie struny na skończonym odcinku przy obecności siły zewnętrznej $f(x,t)$. Dla przykładu rozpatrzymy inne niż poprzednio warunki brzegowe.

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= f(x,t) \qquad \text{w } (0,l) \times (0,\infty) \\ u_x(0,t) &= u(l,t) = 0, \qquad t \geq 0, \\ u(x,0) &= u_0(x), \qquad x \in (0,l), \\ u_t(x,0) &= u_1(x), \qquad x \in (0,l). \end{aligned} \tag{12.8}$$

Załóżmy, że $f(x,t)$ daje się przedstawić w postaci szeregu funkcji własnych zagadnienia

$$-X_n''(x) = \lambda_n X_n(x), \tag{12.9}$$

$$X_n'(0) = X_n(l) = 0, \tag{12.10}$$

a także spełnia warunek zgodności

$$f(0) = f(l) = 0.$$

Podobnie jak we wcześniejszym przykładzie, szukamy rozwiązania $u(x,t)$ w postaci szeregu

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x), \tag{12.11}$$

gdzie X_n są funkcjami własnymi zagadnienia (12.9). Zatem

$$X_n(x) = \cos(\sqrt{\lambda_n} x),$$

gdzie

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$$

oraz $n = 1, 2, ...$

Aby znaleźć funkcje $T_n(t)$, rozwińmy w szereg funkcji $X_n(x)$ prawą stronę równania (12.8), czyli funkcję $f(t,x)$.

$$f(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t) X_n(x). \tag{12.12}$$

Wstawiając formalnie $u(x,t)$ oraz $f(t,x)$ w postaci szeregów (12.11) i (12.12) do równania (12.8) otrzymujemy (również formalnie różniczkując wyraz po wyrazie)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (T_n''(t) + \lambda_n T_n(t)) X_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t) X_n(x).$$

Stąd, aby u mogło być rozwiązaniem, funkcje $T_n(t)$ powinny spełniać równania zwyczajne

$$\begin{aligned} &T_n''(t) + \lambda_n T_n(t) = F_n(t), \\ &T_n(0) = u_0^n, \quad T_n'(0) = u_1^n, \qquad n = 1, 2, ..., \end{aligned}$$

gdzie u_0^n oraz u_1^n są współczynnikami rozwinięcia funkcji $u_0(x)$ i $u_1(x)$ w bazie funkcji $X_n(x)$.

12.1.2 Zagadnienia paraboliczne

Przyjrzyjmy się zagadnieniu przepływu ciepła w jednorodnym pręcie.

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, && x \in (0,l),\ t > 0, \\ u(0,t) &= u(l,t) = 0, && t \geq 0, \\ u(x,0) &= u_0(x), && x \in (0,l), \end{aligned} \tag{12.13}$$

dla $u_0(x) \in L^2(0,l)$.

Ponieważ rozwiązanie powyższego problemu jest zupełnie analogiczne do rozwiązania zagadnienia struny umocowanej na końcach, zauważmy, że funkcja $u(x,t)$ jest postaci

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n t} \sin(\sqrt{\lambda_n} x), \tag{12.14}$$

gdzie

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}.$$

Współczynniki A_n wyliczamy z warunku początkowego. Są to po prostu współczynniki rozwinięcia funkcji $u_0(x)$ w szereg funkcji $\{\sin(\sqrt{\lambda_n} x)\}_{n=1,2,\ldots}$:

$$u(x,0) = u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\sqrt{\lambda_n} x).$$

Zwróćmy uwagę, że przy założeniu $u_0(x) \in L^2(0,l)$ współczynniki A_n są ograniczone niezależnie od n. Zatem, ponieważ w szeregu (12.14) występują szybko gasnące czynniki $e^{-\lambda_n t}$, więc funkcja u jest gładka na zbiorze $(0,l) \times (0,\infty)$.

Regularność funkcji u w chwili $t = 0$ zależy oczywiście od regularności warunku początkowego.

12.2 Zadania do samodzielnego rozwiązania

12.2.1 Równania hiperboliczne

Zadanie 12.1. Metodą Fouriera rozwiązać zagadnienie

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + 1 && \text{w } (0,\pi) \times \mathbb{R}_+, \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0 && \text{dla } t > 0, \\ u(x,0) &= 0, && x \in (0,\pi) \\ u_t(x,0) &= 0 && x \in (0,\pi). \end{aligned}$$