Po scałkowaniu mamy

$$\ln|s| + \frac{1}{2}\ln|1+2u-u^2| = \ln c,$$

czyli

$$s^2(1+2u-u^2) = c^2.$$

Wracamy do wyjściowych zmiennych (x, y) i otrzymujemy równanie

$$(x+1)^2\left(1+2\frac{y-3}{x+1} - \frac{(y-3)^2}{(x+1)^2}\right) = c^2,$$

czyli

$$(x+1)^2 + 2(y-3)(x+1) - (y-3)^2 = c^2.$$

Metody z przykładu 2.9 nie można zastosować, gdy wyznacznik układu (2.9) jest zerowy. Wtedy jednak oba wiersze macierzy układu są do siebie proporcjonalne i podstawienie $z = ax + by$ pozwala sprowadzić równanie do równania o zmiennych rozdzielonych.

2.3 Równania w postaci różniczek zupełnych

Może się zdarzyć, że równanie w postaci różniczek jest różniczką zupełną funkcji dwóch zmiennych. Analiza dostarcza nam narzędzi, które pozwalają łatwo ten fakt sprawdzić. Z drugiej strony, jeśli pewna różniczka dwóch zmiennych jest różniczką zupełną, to łatwo można znaleźć funkcję, której różniczka pokrywa się z rozważaną.

2.10 TWIERDZENIE. *Załóżmy, że w zbiorze $Q = \{(x,y):\ x \in (a,b), y \in (c,d)\}$ funkcje $M(x,y)$, $N(x,y)$, $M_y(x,y)$ i $N_x(x,y)$ są ciągłe oraz*

$$M_y(x,y) = N_x(x,y). \tag{2.10}$$

Wtedy wyrażenie

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy \tag{2.11}$$

jest różniczką zupełną, czyli różniczką pewnej funkcji $F(x,y)$. Jeśli dodatkowo jedna z funkcji $M(x,y)$ lub $N(x,y)$ jest różna od zera w każdym punkcie zbioru Q, to przez każdy punkt $(x_0,y_0) \in Q$ przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa równania

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0. \tag{2.12}$$

Dowód. Jeśli spełniony jest warunek (2.10), to istnienie funkcji $F(x,y)$, której różniczką jest wyrażenie (2.11), wynika z odpowiedniego twierdzenia z analizy. Oznacza to, że (2.11) jest różniczką zupełną. Załóżmy, że $N(x,y) \neq 0$. Wtedy równanie (2.12) można przepisać w postaci

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{2.13}$$

Z faktu, że (2.11) jest różniczką zupełną wynikają równości

$$M(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad N(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Wobec tego równanie (2.13) sprowadza się do równania

$$\frac{dF\big(x, y(x)\big)}{dx} = 0.$$

Rozwiązaniem tego równania jest

$$F\big(x, y(x)\big) = c. \tag{2.14}$$

Przyjmując $c = F(x_0, y_0)$ uzyskujemy jednoznaczność rozwiązania oraz spełnienie warunku początkowego. Warunek $N \neq 0$ gwarantuje spełnienie założeń twierdzenia o funkcji uwikłanej, czyli równanie (2.14) można rozwikłać, znajdując funkcję $y(x)$ w jawnej postaci. ∎

2.11 Przykład. Znajdziemy krzywą całkową równania

$$(2x + 3x^2y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0,$$

przechodzącą przez punkt (1,1).
Sprawdzamy, że jest to równanie w postaci różniczki zupełnej

$$\frac{\partial(2x + 3x^2y)}{\partial y} = 3x^2 = \frac{\partial(x^3 - 3y^2)}{\partial x}.$$

Całkując to równanie, skorzystamy z faktu, że całka krzywoliniowa różniczki zupełnej nie zależy od drogi całkowania. Całkę łączącą punkt $(1,1)$ z punktem (x,y) obliczymy po łamanej łączącej punkty $(1,1)$, $(x,1)$ i (x,y).

$$\int_{(1,1)}^{(x,y)} (2t + 3t^2s)dt + (t^3 - 3s^2)ds =$$
$$\int_{(1,1)}^{(x,1)} (2t + 3t^2)dt + \int_{(x,1)}^{(x,y)} (x^3 - 3s^2)ds =$$
$$x^2 + x^3 - 2 + x^3y - y^3 - x^3 + 1 = x^2 + x^3y - y^3 - 1.$$

Oznacza to, że $F(x,y) = x^2 + x^3y - y^3 - 1$. W celu znalezienia rozwiązania naszego równania należy rozwikłać równanie

$$F(x,y) = 0.$$

Równanie to można rozwikłać względem każdej zmiennej bo $F_y(1,1) = -2$ a $F_x(1,1) = 5$. Jednak ze względu na postać funkcji $F(x,y)$ znalezienie rozwiązania w postaci rozwikłanej nie jest proste.

Równania w postaci różniczek zupełnych nie występują zbyt często. Wiele równań można jednak sprowadzić do postaci różniczki zupełnej po pomnożeniu przez pewną funkcję. Funkcja taka nazywa się **czynnikiem całkującym**. Jeśli wyrażenie

$$Mdx + Ndy \tag{2.15}$$

pomnożymy przez czynnik całkujący $\mu(x,y)$

$$\mu M dx + \mu N dy$$

i zażądamy, aby nowe wyrażenie było różniczką zupełną

$$\frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial x},$$

to otrzymamy skomplikowane równanie o pochodnych cząstkowych

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right). \tag{2.16}$$

Oczywiście rozwiązanie równania (2.16) nie jest wcale łatwiejsze od rozwiązania wyjściowego równania zwyczajnego. Często jednak jest bliskie różniczce zupełnej. Wtedy czynnik $N_x - M_y$, występujący po prawej stronie równania (2.16), może być stały albo może być funkcją tylko jednej zmiennej. Sugeruje to poszukiwanie czynnika całkującego w postaci $\mu(x)$ lub $\mu(y)$ albo $\mu = \mu(z)$, gdzie z jest znaną funkcją zmiennych x i y.

Można tu sformułować kilka prostych obserwacji pomocnych w znajdowaniu takich czynników całkujących:

1. Jeśli
$$-\frac{1}{N}(N_x - M_y) = f(x)$$
to czynnik całkujący jest funkcją jedynie zmiennej x: $\mu(x) = \exp \int f(x)$.

2. Jeśli
$$\frac{1}{M}(N_x - M_y) = f(y)$$
to czynnik całkujący jest funkcją jedynie zmiennej y: $\mu(y) = \exp \int f(y)$.

3. Czynnik całkujący jest postaci $\mu(x,y) = \varphi(z(x,y))$, gdzie z jest nowa zmienną, jeśli
$$\frac{N_x - M_y}{Nz_x - Mz_y} = f(z).$$

Poniższe przykłady ilustrują kilka takich przypadków.

2.12 Przykład. Znajdziemy całkę ogólną równania
$$(x + \sin x + \sin y)dx + \cos y dy = 0. \tag{2.17}$$

Równanie nie jest w postaci różniczki zupełnej, bo
$$N_x - M_y = -\cos y.$$

Zauważmy jednak, że wyrażenie
$$\frac{1}{N}(N_x - M_y) = -1$$
można traktować jako funkcją zmiennej x, co prowadzi do czynnika całkującego $\mu(x) = e^x$. Mnożymy równanie (2.17) przez ten czynnik całkujący i otrzymujemy
$$e^x(x + \sin x + \sin y)dx + e^x \cos y dy = 0.$$

Równanie to całkujemy po łamanej złożonej z odcinków równoległych do osi współrzędnych (jak w przykładzie 2.11), łączącej punkt (p_1, p_2) z punktem (x, y)
$$\int_{(p_1,p_2)}^{(x,y)} e^t(t + \sin t + \sin s)dt + e^t \cos s ds =$$
$$\int_{(p_1,p_2)}^{(x,p_2)} e^t(t + \sin t + \sin p_2)dt + \int_{(x,p_2)}^{(x,y)} e^x \cos s ds =$$
$$xe^x - e^x + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)e^x + e^x \sin p_2 + e^x \sin y$$
$$- p_1 e^{p_1} + e^{p_1} - \frac{1}{2}(\sin p_1 - \cos p_1)e^{p_1} - e^x \sin p_2 =$$
$$xe^x - e^x + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)e^x + e^x \sin y$$
$$- p_1 e^{p_1} + e^{p_1} - \frac{1}{2}(\sin p_1 - \cos p_1)e^{p_1}.$$

Całka ogólna ma więc postać
$$xe^x - e^x + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)e^x + e^x \sin y = c.$$

2.13 Przykład. Znajdziemy całkę ogólną równania

$$(xy^2 + y)dx - (x + y^2)dy = 0. \tag{2.18}$$

Równanie nie jest w postaci różniczki zupełnej bo

$$N_x - M_y = -2xy - 2.$$

Zauważmy jednak, że wyrażenie

$$\frac{1}{M}(N_x - M_y) = -\frac{2}{y},$$

jest funkcją zmiennej y, co prowadzi do czynnika całkującego $\mu(x) = y^{-2}$. Mnożymy równanie (2.18) przez ten czynnik całkujący i otrzymujemy

$$(x + y^{-1})dx - (xy^{-2} + 1)dy = 0.$$

Równanie to całkujemy po łamanej złożonej z odcinków równoległych do osi współrzędnych (jak w przykładzie 2.11), łączącej punkt (p_1, p_2) z punktem (x, y)

$$\int_{(p_1,p_2)}^{(x,y)} (t + s^{-1})dt - (ts^{-2} + 1)ds =$$

$$\frac{1}{2}x^2 + xy^{-1} - y - \frac{1}{2}p_1^2 + p_1p_2^{-1} - p_2.$$

Całka ogólna ma więc postać

$$\frac{1}{2}x^2 + xy^{-1} - y = c.$$

2.14 Przykład. Znajdziemy całkę ogólną równania

$$xy^2dx + (x^2y - x)dy = 0. \tag{2.19}$$

Ponieważ

$$N_x - M_y = -1,$$

równanie nie jest w postaci różniczki zupełnej. Postać funkcji $M(x, y)$ i $N(x, y)$ wskazuje także, że nie ma czynnika całkującego, który byłby tylko funkcją zmiennej x lub y. Można jednak zauważyć, że poszukując czynnika całkującego w postaci $\mu = \mu(z)$ dostaniemy z równania (2.16) wyrażenie

$$\frac{1}{xy^2z_y - (x^2y - x)z_x}.$$

Łatwo zauważyć, że jeśli przyjąć $z(x,y) = xy$, to wyrażenie powyższe stanie się funkcją wyłącznie zmiennej z

$$\frac{1}{xy^2 z_y - (x^2 y - x) z_x} = \frac{1}{x^2 y^2 - (x^2 y^2 - xy)} = \frac{1}{xy}.$$

Poszukujemy więc czynnika całkującego w formie $\mu = \mu(xy)$. Aby znaleźć ten czynnik wracamy do równania (2.16) i po podstawieniu $z = xy$ otrzymujemy równanie

$$z^2 \mu' - (z^2 - z)\mu' = -\mu.$$

Po uporządkowaniu mamy

$$z\mu' = -\mu,$$

czyli $\mu = (xy)^{-1}$. Po pomnożeniu równania (2.19) przez czynnik całkujący otrzymujemy

$$y dx + \Big(x - \frac{1}{y}\Big) dy = 0.$$

Całkujemy to równanie, jak w poprzednim przykładzie, po łamanej łączącej punkty (p_1, p_2) i (x, y)

$$\begin{aligned}\int_{(p_1,p_2)}^{(x,y)} s dt + \Big(t - \frac{1}{s}\Big) ds &= p_2 x - p_1 p_2 + xy - p_2 x - \ln|y| + \ln|p_2| \\ &= xy - \ln|y| - p_1 p_2 + \ln|p_2|.\end{aligned}$$

Stąd mamy całkę ogólną

$$xy - \ln|y| = c.$$

2.4 Równania liniowe pierwszego rzędu

Obecnie zajmiemy się przypadkiem równań liniowych pierwszego rzędu.

2.15 DEFINICJA. *Równanie postaci*

$$\dot{x} + p(t)x = q(t), \tag{2.20}$$

gdzie $p(t)$ i $q(t)$ są funkcjami zmiennej $t \in (a,b)$, nazywa się ***równaniem liniowym****. Jeśli $q(t) \equiv 0$, to jest to* ***równanie liniowe jednorodne****.*

Dla równania (2.20) bardzo łatwo można otrzymać twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności.

2.16 TWIERDZENIE. *Jeśli funkcje $p(t)$ i $q(t)$ są ciągłe dla $t \in (a,b)$, to przez każdy punkt zbioru $Q = (a,b) \times \mathbb{R}$ przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa równania (2.20). Maksymalnym przedziałem istnienia każdego takiego rozwiązania jest przedział (a,b).*